Fysik 6

Elektrodynamik
John Niclasen

Indhold

1. Fourier Transformation

Symboler

Symbol	Forklaring
c	Koefficient
n	Heltal
T	Periode
t	Tid
ε	Elektromotorisk kraft (emf)
ω	Vinkelfrekvens (Vinkelhastighed)

1.1 Fourier Serier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n \, e^{-i\omega_n t}$$

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{T}\int_0^T dt \; f(t) \; e^{i\omega_n t}$$

$$\omega_n = \frac{n\,2\pi}{T}$$

1.1.1 Eksempel: Rektangular pulse

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_0 & , \quad 0 + nT \le t \le T/2 + nT \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots \\ -\varepsilon_0 & , \quad T/2 + nT \le t \le T + nT \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= \frac{1}{T}\int_0^T dt \; \varepsilon(t) \; e^{i\omega_n t} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{T}\left(\int_0^{T/2} dt \; e^{i\omega_n t} - \int_{T/2}^{T} dt \; e^{i\omega_n t}\right) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{T}\left(\frac{1}{i\omega_n}\left[e^{i\omega_n t}\right]_0^{T/2} - \frac{1}{i\omega_n}\left[e^{i\omega_n t}\right]_{T/2}^{T}\right) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{i\,2\pi n}\left(2e^{in\pi} - 2\right) \\ &= \begin{cases} 0 & n \; lige \\ \frac{i2\varepsilon_0}{\pi n} & n \; ulige \end{cases} \end{aligned}$$

Check for division med nul! Så $\widetilde{c}_0$ må beregnes separart:

$$\widetilde{c}_0 = \frac{1}{T}\int_0^T dt\;\varepsilon(t)\;e^{i\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{0\cdot 2\pi}{T} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{c}_0 = \frac{1}{T}\int_0^T dt\;\varepsilon(t)$$

$$= \quad \frac{\varepsilon_0}{T}\left(\int_0^{T/2} dt - \int_{T/2}^{T} dt\right)$$

$$= \quad \frac{\varepsilon_0}{T}\left(\frac{T}{2} - T + \frac{T}{2}\right)$$

$$= \quad 0$$

Så

$$\varepsilon(t) = \sum_{n=-\infty, n\;ulige}^{\infty} \frac{2\varepsilon_0}{\pi n}\,e^{-in\omega t}$$

$$= \quad \sum_{n=1,\;n\;ulige}^{\infty} \frac{i2\varepsilon_0}{\pi n}\left(e^{-in\omega t} - e^{in\omega t}\right)$$

$$= \quad \sum_{n=1,\;n\;ulige}^{\infty} \frac{4\varepsilon_0}{\pi n}\sin(n\omega t)$$

1.2 Fourier Integraler

$$\widetilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\;e^{i\omega t} f(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\;e^{-i\omega t}\widetilde{f}(\omega)$$

1.2.1 Eksempel: Eksponential funktion

$$f(t) = e^{-\gamma|t|}$$

$$\widetilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\;e^{i\omega t} e^{-\gamma|t|}$$

$$= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} dt\;e^{i\omega t}e^{\gamma t} + \int_0^{\infty} dt\;e^{i\omega t}e^{-\gamma t}\right]$$

$$= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{\gamma + i\omega} + \frac{1}{\gamma - i\omega}\right]$$

$$= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2\gamma}{\gamma^2 + \omega^2}$$

2. Bølger

Symboler

Symbol	Forklaring
A	Amplitude
k	Konstant
L	Længde

n	Heltal
$\bar{r}$	Retningsvektor
T	Tension (Målt i Newton)
t	Tid
v	Hastighed
z	Afstand (hen ad strengen)
δ	Fase
λ	Bølgelængde
μ	Massefylde
ω	Vinkelfrekvens (Vinkelhastighed)

2.1 Stående Bølger

2.1.1 Grænsebetingelser

$$f(0,t) = f(L,t) = 0$$

2.1.2 Diskrete Frekvenser

$$\omega_n = n\frac{v\pi}{L}$$

2.1.3 Stående Bølger

$$f_n(z,t) = A\ \sin(k_n z)\ \cos(\omega_n t)$$
$$k_n = \frac{\omega_n}{v}$$
$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Da $\sin$ og $\cos$ leddene leverer værdier mellem -1 og 1, er A den egentlige amplitude. Leddet

$$\sin(k_n z)$$

er uafhængig af tiden og bestemmer den maksimale amplitude ethvert sted på strengen. Leddet

$$\cos(\omega_n t)$$

får den stående bølge til at svinge med tiden.

Funktion der beskriver mange stående bølger på een gang:

$$f(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ \sin(k_n z)\ \cos(\omega_n t)$$

2.2 Bølger i 3D

2.2.1 Wave Equation

Bølgefunktionen

$$\bar{\nabla}^2 f(\bar{r},t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f(\bar{r},t)}{\partial t^2}$$

2.2.2 Plane Bølger

Plane bølger er her bølger, der strækker sig til uendeligt i x- og y-retningen og bevæger sig i z-retningen. Altså ikke som bølgerne på havet.

Den komplekse funktion

$$\tilde{f}(\bar{r},t) = \tilde{A}\ e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)}$$

er en løsning til bølgefunktionen, hvis

$$\omega = v\ k$$

Hvis $\bar{k}$ er i z-retningen, og vi ser på den reelle løsning:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= |\,\tilde{A}\,|\ e^{i\delta} \\ \Rightarrow \quad |\,\tilde{f}(\bar{r},t)\,| &= |\,\tilde{A}\,|\ \cos(kz-\omega t+\delta) \end{aligned}$$

hvilket minder om løsningen for stående bølger på en streng.

2.2.3 Sfæriske Bølger

Den komplekse funktion

$$\tilde{f}(\bar{r},t) = \tilde{A}\ \frac{e^{i(k\cdot r-\omega t)}}{r}$$

er en løsning til bølgefunktionen, hvis

$$\omega = v\ k$$

Hvis man kigger på et lille område omkring punktet z_0 langt fra udbredelsespunktet (origo) gælder:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\bar{r},t) &\approx \tilde{A}\ \frac{e^{i(k(z_0+z')-\omega t)}}{z_0} \\ &= \tilde{A}'\ e^{i(kz'-\omega t)} \quad , \quad \tilde{A}' = \tilde{A}\ \frac{e^{ikz_0}}{z_0} \end{aligned}$$

hvilket blot er en plan bølge.

2.3 Interferens

2.3.1 Bølgefunktionen

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^2 f &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= v^2\bar{\nabla}^2 f \end{aligned}$$

Hvis f_1 og f_2 er løsninger, så er f_1+f_2 også en løsning.

2.3.2 Rumlig Interferens

2 bølger, som bevæger sig i modsat retning:

$$\tilde{f}(z,t) = \tilde{A}\ e^{i(kz-\omega t)} + \tilde{A}\ e^{i(-kz-\omega t)}$$

$\sim$

$$= \quad 2\tilde{A} \ \cos(kz)\ e^{-i\omega t}$$

2.3.3 2 Højttalere

$$\tilde{f} = \tilde{A}\left(\frac{e^{i(kr_+ - \omega t)}}{r_+} + \frac{e^{i(kr_- - \omega t)}}{r_-}\right)$$

Ved at sætte $r \approx r\pm$:

$$\tilde{f} = \frac{2\tilde{A}\ e^{i(k(r_+ + r_-)/2 - \omega t)}}{r} \cos\left(k\,\frac{r_+ - r_-}{2}\right)$$

Der er konstruktiv interferens, når:

$$\cos\left(k\,\frac{r_+ - r_-}{2}\right) = \pm 1$$
$$\Leftrightarrow \quad k(r_+ - r_-) = n2\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad r_+ - r_- = n\lambda$$

Der er destruktiv interferens, når:

$$\cos\left(k\,\frac{r_+ - r_-}{2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad k(r_+ - r_-) = n2\pi + \pi$$
$$\Leftrightarrow \quad r_+ - r_- = (n + \frac{1}{2})\lambda$$

Langt fra origo ved $z = z_0$gælder:

$$r\pm \approx z_0 + \frac{(x \mp L/2)^2 + y^2}{2z_0}$$
$$\Rightarrow \quad r_+ - r_- \approx -\frac{Lx}{z_0}$$
$$\Rightarrow \quad \cos\left(k\,\frac{r_+ - r_-}{2}\right) \approx \cos\left(\frac{kLx}{2z_0}\right)$$

Hvilket betyder, at der er konstruktiv interferens, når:

$$x = \frac{n\lambda z_0}{L}$$

Afstanden mellem striber med konstruktiv eller destruktiv interferens er:

$$\Delta x = \frac{\lambda z_0}{L}$$

2.3.4 Alternativ Udledning

$$\tilde{f} = \tilde{A}\left(\frac{e^{i(kr_+ - \omega t)}}{r_+} + \frac{e^{i(kr_- - \omega t)}}{r_-}\right)$$

Ved at sætte $r_+ \approx r_-$:

$$\tilde{f}(\bar{r}, t) = \frac{\tilde{A}}{r}\left(e^{ikr_+} + e^{ikr_-}\right)\ e^{-i\omega t}$$
$$\tilde{f}(\bar{r}, t) = |\bar{C}(\bar{r})|\ e^{-i(\omega t - \delta(\bar{r}))}$$
$$|\bar{C}(\bar{r})|^2 = \frac{|\tilde{A}|^2}{r^2}\left(2 + 2\ \cos(k(r_+ - r_-))\right)$$

, hvor $\delta(\bar{r})$ er fasen. For at se interferensen er man typisk kun interesseret i størrelsen af $\widetilde{C}$, da den reelle oscillation er:

$$f(\bar{r},t) = |\widetilde{C}(\bar{r})| \ \cos(\omega t - \delta(\bar{r}))$$

Der er destruktiv interferens, når $|\widetilde{C}| = 0$ og konstruktiv interferens, når $|\widetilde{C}|$ er max, hvorfor man ikke behøver at kende δ.

2.3.5 Tidslig Interferens

2 1D-bølger med forskellig frekvenser:

$$\widetilde{f}_1(z,t) = \widetilde{A}\ e^{i(k_1 z - \omega_1 t)}$$
$$\widetilde{f}_2(z,t) = \widetilde{A}\ e^{i(k_2 z - \omega_2 t)}$$
$$k_i = \frac{\omega_i}{v}$$
$$\widetilde{f}(0,t) = 2\widetilde{A}\ \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\, t\right)\ e^{-i(\omega_1+\omega_2)t/2}$$

Den sidste formel kan opfattes som en bølge oscillerende med frekvensen $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ og med en amplitude oscillerende i tiden som $\cos((\omega_1 - \omega_2)t/2)$