

Oversigt over gruppeteori: definitioner og sætninger

$(G, \circ)$ kaldes en *gruppe*, når følgende aksiomer er opfyldt:

- 0) $(G, \circ)$ er en organiseret (stabil) mængde: $a, b \in G \Rightarrow a \circ b \in G$
- 1) Den *associative lov* gælder, dvs. for alle $a, b, c \in G$ gælder $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.
- 2) Der findes et neutralt element $e \in G$, således at for alle $a \in G$ gælder $a \circ e = e \circ a = a$.
- 3) Til ethvert $a \in G$ findes der et *inverst* element $a^{-1} \in G$, således at $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Hvis yderligere $a \circ b = b \circ a$ for alle $a, b \in G$, kaldes gruppen *kommutativ* eller *abelsk*.

Sætning (2.1)

I en gruppe har "divisionsligningerne"

$$ax = b \quad ; \quad ya = b$$

hver for sig netop én løsning.

Korollar (2.2)

I en gruppe gælder "forkortningsreglerne"

$$ax = ay \Rightarrow x = y \quad ; \quad xb = yb \Rightarrow x = y.$$

Korollar (2.3)

Lad $a \in G$ være et fastholdt element. Så er afbildningen givet ved $x \mapsto ax$ en enentydig afbildning af gruppen G på sig selv, $G \mapsto G$.

Definition: Hvis elementantallet i G er n , kaldes gruppen G *endelig af n 'te orden*. Hvis G indeholder uendelig mange elementer kaldes gruppen *uendelig*.

Definition: Lad H være en delmængde af en gruppe G , og antag at H er stabil med hensyn til kompositionsreglen i G ; så kaldes H en *undergruppe* i G , hvis den organiserede mængde H er en gruppe.

Sætning (2.4)

En delmængde H af en gruppe G er en undergruppe, hvis og kun hvis følgende gælder:

- 1) $a, b \in H$ medfører $ab \in H$.
- 2) Det neutrale element $e \in G$ tilhører H .
- 3) $a \in H$ medfører $a^{-1} \in H$.

Definition: En endelig gruppe G kaldes *cyklisk*, hvis G indeholder et element a med den egenskab, at et vilkårligt element $b \in G$ kan skrives $b = aa \cdots a$ (p faktorer), eller kort $b = a^p$. Elementet a siges at *frembringe* gruppen.

Definition: En gruppe G (endelig eller uendelig) kaldes *cyklisk*, hvis G indeholder et element a , så at et vilkårligt $b \in G$ kan skrives som en potens af a .

Definition: Ved *ordenen* af et element $a \in G$ forstås ordenen af den af a frembragte (under)gruppe.

Sætning (2.5)

Lad G være en endelig gruppe af orden g , H en undergruppe (i G) af orden h , så er h divisor i g .

Korollar (2.6)

Ordenen af ethvert element i en endelig gruppe er divisor i gruppens orden.

Sætning (3.1)

Mængden S_n af permutationer af en endelig mængde (med n elementer) udgør en gruppe, når sammensætning af permutationer tages som kompositionsregel. Gruppen kaldes den symmetriske gruppe af n 'te grad.

Sætning (3.3)

Enhver permutation kan (endda på uendelig mange måder) skrives som et produkt af transpositioner.

Korollar (3.4)

Ethvert element i den symmetriske gruppe S_n kan skrives som et produkt af transpositioner af den specielle form (12) , (13) , (14) , $\dots$, $(1n)$.

Definition: En permutation

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n \quad (n > 2)$$

kaldes lige, hvis den kan skrives som et produkt af et *lige* antal transpositioner, og *ulige* ellers.

Korollar (3.5)

En permutation

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n \quad (n > 2)$$

er lige eller ulige eftersom inversionstallet $I(i_1, i_2, \dots, i_n)$ er lige henholdsvis ulige.

Sætning (3.6)

Mængden A_n af lige permutationer af $n > 1$ elementer er en undergruppe i S_n .

Definition (4.1): En *ækvivalensrelation* i mængden A er en relation R , som opfylder 3 krav

- 1) *refleksivitet*: $(a, a) \in R$,
- 2) *symmetri*: $(a, b) \in R$ medfører $(b, a) \in R$,
- 3) *transitivitet*: $(a, b) \in R$ og $(b, c) \in R$ medfører $(a, c) \in R$.

Sætning (4.2)

Til en ækvivalensrelation $\sim$ i A svarer der en klassesdeling af A , således at for $a, b \in A$ gælder $a \sim b$ netop når a og b er i samme klasse.

Sætning (4.3)

Konjugation er en ækvivalensrelation.

Sætning (4.4)

Elementerne i samme klasse har samme orden.

Sætning

To permutationer i S_n er konjugerede, hvis og kun hvis de er af samme type; antallet af konjugationsklasser i S_n er derfor antallet af typer.

Sætning (6.2)

En undergruppe er normal, når og kun når $a \in H$ medfører $t^{-1}at \in H$ for alle $t \in G$.

Sætning (6.3)

En undergruppe af index 2 er normal.

Korollar (6.4)

Den alternerende gruppe A_n er en invariant undergruppe i den symmetriske gruppe S_n .

Sætning (6.6)

Om to vilkårlige sideklasser Ha og Hb til en invariant undergruppe H i gruppen G gælder $HaHb = Hab$.

Sætning (6.7)

Samlingen af sideklasser til en normal undergruppe H i G udgør en gruppe, når den organiseres med multiplikation af delmængder i G som kompositionsregel.

Definition (6.8): Gruppen T , hvis elementer er sideklasser til en normal undergruppe H i G kaldes *kvotientgruppen af G med hensyn til H* eller *faktorgruppen af H i G* . Den betegnes $G|H$; dens orden er index H .

Lad $(G, \cdot)$ og $(G, \circ)$ være to grupper og f en afbildning af G ind i G' . Afbildningen f kaldes en *homomorfi*, hvis der for alle $a, b \in G$ gælder, at

$$f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b).$$

Sætning (7.3)

Hvis f er en homomorfi af G ind i G' , så er mængden $f(G)$ af billedelementer en undergruppe i G' .

Sætning (7.4)

Hvis f er en homomorfi af G ind i G' , er mængden:

$\ker f = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$ en invariant undergruppe i G .

Definition (7.5): En enentydig homomorfi f af en gruppe G på en gruppe G' kaldes en *isomorfi af G på G'* , og to grupper kaldes *isomorfe*, hvis der findes en isomorfi af den ene gruppe på den anden; vi skriver $G \equiv G'$.

Definition (7.6): Hvis f er en homomorfi af gruppen G på gruppen G' , så kaldes G' en *repræsentation* af G . Hvis f er en isomorfi af gruppen G på gruppen G' , så kaldes G' en *tro repræsentation* af G .

Sætning (7.7) (Cayley)

Enhver endelig gruppe G af orden n er isomorf med en undergruppe i S_n .

Sætning (7.8)

Enhver cyklisk gruppe af orden n er isomorf med $(\mathbb{Z}_n, +)$, den additive rest-klassergruppe modulo n . Enhver uendelig cyklisk gruppe er isomorf med $(\mathbb{Z}, +)$, den additive gruppe af hele tal.

Sætning (7.9)

Hvis H er en normal undergruppe i en gruppe G , så kan G afbildes homomorft på faktorgruppen G/H . Omvendt: hvis $G' = f(G)$ er det homomorfe billede af G ved homomorfien f , så er G' isomorf med faktorgruppen $G/\ker f$.

Sætning (8.2)

En gruppe G er isomorf med det direkte produkt af to af dens undergrupper A og B , når og kun når A og B er invariante undergrupper i G med fællesmængden lig $\{e\}$ og med $AB = G$.

Korollar (8.3)

En gruppe G er direkte produkt $A \otimes B$ af to undergrupper A og B , hvis

- 1) ethvert $g \in G$ kan skrives $g = ab$, $a \in A$, $b \in B$;
- 2) faktorerne a og b er éntydigt bestemt af g ;
- 3) ethvert $a \in A$ kommuterer med ethvert $b \in B$.

Definition (9.1): En repræsentation af n te grad af en gruppe G er en med G homomorf undergruppe G' i GL_n .

Definition (9.2): Ved karakteren χ_f af en repræsentation $f(G)$ af gruppen G forstås funktionen $\chi_f(g)$ defineret på G ved

$$\chi_f(g) = \text{spor } f(g)$$

Sætning (9.3)

Konjugerede elementer i en gruppe G har samme karakter; dvs. karakteren afhænger af G 's konjugationsklasser.

Sætning (9.4)

Ækvivalente repræsentationer har samme karakter.

Sætning (9.5)

Karakteren af den regulære repræsentation er repræsentationens grad på det neutrale element $e \in G$, og ellers 0, eller

$$\chi_F(e) = n, \quad \text{og} \quad \chi_F(g) = 0 \quad (g \in G, g \neq e).$$

Sætning (9.8)

Enhver klasse af ækvivalente repræsentationer for en endelig gruppe indeholder (mindst) en unitær repræsentation.

Sætning (9.9)

Til en vilkårlig endelig undergruppe af matricer $A_1, A_2, \dots, A_r$ i GL_n findes

$\mathbf{S} \in GL_n$, således at matricerne $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{S}, \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_2\mathbf{S}, \dots, \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_r\mathbf{S}$ alle er unitære.

Sætning (10.4)

Hvis en unitær repræsentation $\mathbf{D}_j$ af grad n lader et egentlig underrum V^p (af dimension $p > 0$) i K^n invariant, så er repræsentationen reducibel.

Sætning (10.6)

Hvis en repræsentation $\mathbf{D}'_j$ er reducibel, så findes der en matrix $\mathbf{T} \neq c\mathbf{E}$, således at $\mathbf{D}'_j\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{D}'_j$.

Sætning (10.7)

Hvis der findes en matrix $\mathbf{T} \neq c\mathbf{E}$, således at $\mathbf{T}$ kommuterer med hver af matricerne $\mathbf{D}_j$ i en repræsentation, så er repræsentationen reducibel.

Sætning (10.8)

Hvis der findes en matrix $\mathbf{T}$ som kommuterer med hver af matricerne $\mathbf{D}_j$ i en irreducibel repræsentation, så er $\mathbf{T} = c\mathbf{E}$.

Korollar (10.10)

En irreducibel repræsentation af en kommutativ gruppe G er af 1. grad.

Sætning (11.1)

Lad $\mathbf{A}_j$ og $\mathbf{B}_j$ være to irreducible repræsentationer af gruppen G af grader henholdsvis n og p , og lad $\underline{y} = \mathbf{T}\underline{x}$ være en lineær afbildning af K^n ind i K^p . Hvis det om matricerne $\mathbf{T}, \mathbf{A}_j$ og $\mathbf{B}_j$ gælder, at

$$(11.2) \quad \mathbf{T}\mathbf{A}_j = \mathbf{B}_j\mathbf{T} \quad (j = 1, 2, \dots, r),$$

hvor r er G 's orden, så er enten $\mathbf{T}$ en nulmatrix eller $p = n$, $\mathbf{T}$ regulær og $\mathbf{A}_j$ og $\mathbf{B}_j$ ækvivalente.

Sætning (11.3)

For vilkårlig valg af indices i, j, k, l er

$$(11.4) \quad \sum_{s=1}^r a_{ij}^{(s)} [b_{kl}^{(s)}]^* = 0$$

$$(11.5) \quad \sum_{s=1}^r a_{ij}^{(s)} [a_{kl}^{(s)}]^* = \frac{r}{n} \delta_{ik} \delta_{jl},$$

hvor δ_{ik} og δ_{jl} er Kronecker-symboler.

Sætning (11.14)

To ikke-ækvivalente, irreducible repræsentationer har forskellige karakterer.

Sætning (11.17)

For en endelig gruppe G er antallet af ikke-ækvivalente, irreducible repræsentationer lig med antallet af konjugationsklasser.