Projekt, Matematik 1GB, Forår 2004

Kennet B. W. Harpsøe, Loui E. Sørensen, Thøger Juul Thorsen
hold 3

23. april 2004

1 Opgave 1

(a) Vis, at det for enhver $n \times n$ matrix A gælder, at

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^t(A + A^t)\mathbf{x}.$$

Svar: Med henvisning til almindelige regneregler for matrix- og vektorregning, gælder, at

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^t(A + A^t)\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^t(A\mathbf{x} + A^t\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^t(A\mathbf{x} + A^t\mathbf{x}^{tt}) =$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^t(A\mathbf{x} + (\mathbf{x}^t A)^t) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^\mathbf{t} A\mathbf{x} + \mathbf{x}^t(\mathbf{x}^t A)^t) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + (\mathbf{x}^t A\mathbf{x})^t) =$$

$$\frac{1}{2}(2(\mathbf{x}^t A\mathbf{x})) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$$

Hvor det næstsidste lighedstegn skyldes det faktum, at led af typen $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ er skalarer for alle $n \times n$-matricer A med tilhørende n-dimensionelle vektorer $\mathbf{x}$, og at enhver skalar er lig sin egen transponerede.

(b) Vis, at hvis q er en kvadratisk form, så findes der en symmetrisk matrix A, så $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$.

Svar: Som vi netop har vist det i opgaven ovenfor gælder det, at

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^t(A + A^t)\mathbf{x} = \mathbf{x}^t\frac{1}{2}(A + A^t)\mathbf{x},$$

Hvoraf

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t)$$

Antager man fra starten intet om A, og ser man på den ij'te indgang i matricen på højresiden, vil denne være gennemsnittet af den ij'te og den ji'te indgang i A, og på samme måde vil den ji'te indgang være gennesmsnittet af den ij'te og den ji'te indgang i A. Følgelig vil Matricen på højresiden og dermed også A være symmetrisk.

(c) Vis, at $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$, er en kvadratisk form på $\mathbb{R}^2$, og find en symmetrisk 2×2 matrix A, så

$$q(x,y) = \begin{bmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{bmatrix}.$$

Svar: Det vides, ud fra definitionen på kvadratiske former og de tidligere opgaver, at A kan vælges til at være en symmetrisk matrix, så

$$q(x,y) = \begin{bmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{b} & \mathrm{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{bmatrix}.$$

Ganger vi disse matricer ud, får vi:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{b} & \mathrm{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{ax+by} & \mathrm{bx+cy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{bmatrix} =$$
$$ax^2 + bxy + bxy + cy^2 = ax^2 + 2bxy + cx^2.$$

(d) Vis, at hvis $b^2 < ac$ og $a > 0$, så har matricen A i (c) to positive egenværdier og hvis $b^2 > ac$, så har matricen en positiv og en negativ egenværdi.

Svar: Egenværdier findes som rødderne i det karakteristiske polynomium $\kappa = \det(\lambda I - A)$, i dette tilfælde

$$\kappa = (\lambda - a)(\lambda - c) - b^2 = \lambda^2 - c\lambda - a\lambda + ac - b^2 =$$
$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2),$$

som er et andengradspolynomium. Rødderne til dette findes ved den sædvanlige formel for rødder i andengradspolynomier:

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2a},$$

eller i dette tilfælde

$$\lambda = \frac{(a + c) \pm \sqrt{(a + c)^2 - 4(ac - b^2)}}{2} = \frac{(a + c) \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2}$$

Det ses her, at hvis $b^2 < ac, a > 0$ gælder, at $c > 0$ og

$$\sqrt{(a - c)^2 + 4b^2} < \sqrt{(a - c)^2 + 4ac} = \sqrt{(a + c)^2} = a + c.$$

Dermed vil gælde at

$$(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} > 0,$$

Og dermed

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0.$$

Omvendt, hvis $b^2 > a$, da vil andet led på brøkstregen numerisk være større end første led, hvorfor

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \quad \text{eller} \quad \lambda_2 < 0 < \lambda_1.$$

2 Opgave 2

(a) Vis, for enhver ortogonal matrix P, at de nye basisvektorer frembragt som vist i opgaveteksten, udgør en ortonormal basis i $\mathbb{R}^n$.

Svar: Sættet $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_n\}$, hvor

$$\mathbf{x}_1 = P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = P\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n = P\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

er sættet af søjlevektorer i P. Da P er ortogonal, dvs $PP^t = I$, er sættet ortonormalt. At sætte $PP^t = I$ svarer jo til at tage skalarproduktet af hver vektor med sig selv og hver af de øvrige vektorer og få 0 i alle de tilfælde, hvor det ikke er vektoren prikket med sig selv, hvilket er et udtryk for at de er ortogonale, og få 1 i de tilfælde hvor man prikker vektoren med sig selv, hvilket kun lader sig gøre, hvor hver vektor har længden 1.

Ergo er sættet ortonormalt.
Da sættet ydermere har netop n elementer, udspænder det hele $\mathbb{R}^n$, og dermed er det en ortonormalbasis for $\mathbb{R}^n$.

(b) Vis, at man kan vælge den ortogonale matrix P, så den kvadratiske form i nye koordinater bliver

$$q(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^t D\mathbf{y},$$

hvor D er en diagonal matrix.

Svar: Her husker vi på, hvad den kvadratiske form er, skrevet ud, nemlig:

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x},$$

eller i dette tilfælde:

$$q(P\mathbf{y}) = (P\mathbf{y})^t AP\mathbf{y} = \mathbf{y}^t P^t AP\mathbf{y}.$$

Da P er ortogonal, er $P^t = P^{-1}$, hvoraf:

$$q(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^t P^{-1} AP\mathbf{y}$$

Da vi frit kan vælge A til at være en symmetrisk repræsentationsmatrix for den kvadratiske form, følger direkte af korollar 8.25 i Messer, at der findes en ortogonal matrix P, så

$$P^{-1}AP = D,$$

hvor D er en diagonal matrix.
Da intet indtil videre er forudsat om P udover at den er ortogonal, kan vi nu vælge P som netop den matrix, der diagonaliserer A. Heraf fås:

$$q(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^t P^{-1} AP\mathbf{y} = \mathbf{y}^t D\mathbf{y}.$$

(c) Benyt opgave 2(b) og opgave 1(d) til at give et nyt bevis for Lemma 9.25 i *Funktioner af en og flere variable.*

Svar: Lemma 9.25 lyder som følger:

Lad a, b og c være relle tal.

(a) Hvis $b^2 < ac$ og $a > 0$, så er $ah^2 + 2bhk + ck^2 > 0$ for enhver egentlig vektor $(h, k) \in \mathbb{R}^2$.

(b) hvis $b^2 > ac$, så antager polynomiet $ah^2 + 2bhk + ck^2$ både positive og negative værdier.

Bevis for Lemma 9.25:

Det observeres først, at hvis vi sætter

$$\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \mathbf{x}, \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = A$$

kan polynomiet $ah^2 + 2bhk + ck^2$ skrives på matrixformen

$$\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ah + bk \\ bh + ck \end{bmatrix} = ah^2 + 2bhk + ck^2,$$

altså som en kvadratisk form. Om denne vides fra opgave 2(b), at man kan vælge en ortogonal basisskiftematrix P, så den kvadratiske form i nye koordinater bliver

$$q(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^t D\mathbf{y},$$

hvor D er en diagonalmatrix og $\mathbf{y} = (m, n) = P^{-1}\mathbf{x}$. Endvidere vides det fra opgave 1(d), at D er diagonaliseringen af A, og følgelig har den ifølge Messer 8.13 egenværdierne tilhørende matricen A som indgangene på diagonalen. I nye koordinater bliver den kvadratiske form altså:

$$q(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^t D\mathbf{y} =$$

$$\begin{bmatrix} m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \lambda_1 m^2 + \lambda_2 n^2$$

- Bevis for (a): Fra opgave 1(d) vides det nu, at hvis $b^2 < ac, a > 0$ er $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, hvorfor det også gælder, at

  $$\lambda_1 m^2 + \lambda_2 n^2 \geq 0.$$

  Men det gælder ligeledes, hvis P er ortogonal, at

  $$\mathbf{y}^t D\mathbf{y} = (P^t\mathbf{x})^t DP^t\mathbf{x} =$$

  $$\mathbf{x}^t P^{tt} DP^t\mathbf{x} = \mathbf{x}^t PDP^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}.$$

  Da vi netop har vist, at $\mathbf{y}^t D\mathbf{y} \geq 0$ gælder også, at

  $$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = ah^2 + 2bhk + ck^2 \geq 0.$$

- Bevis for (b): Fra opgave 1(d) vides, at hvis $b^2 > ac$, så er $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ eller $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.
  Analogt med beviset før betyder dette, at $\lambda_1 m^2 + \lambda_2 n^2$ vil antage både positive og negative værdier. For andet tilfælde, hvor $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, gælder det jo nemlig, at

  $$\lambda_1 m^2 + \lambda_2 n^2 \geq 0 \quad \text{for} \quad n = 0$$

  og

  $$\lambda_1 m^2 + \lambda_2 n^2 \leq \quad \text{for} \quad m = 0.$$

  Desuden ses det også tydeligt, at

  $$\lambda_1 m^2 + \lambda_2 n^2 = 0 \quad \text{netop} \quad \text{hvor} \quad (m, n) = (0, 0),$$

  Hvoraf kan konkluderes, at $\lambda_1 m^2 + \lambda_2 n^2$ antager både positive og negative værdier. Igen vides det her, at $\lambda_1 m^2 + \lambda_2 n^2 = \mathbf{y}^t D\mathbf{y} = \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = ah^2 + 2bhk + ck^2$, hvorfor

  $$ah^2 + 2bhk + ck^2$$

  antager både positive og negative værdier.

2.1 En lille parantes om a, b og c og ABC-kriteriet

Hvad vi har fundet her er egtl. et specialtilfælde af ABC-kriteriet for kvadratiske former i 2 dimensioner - muligvis også i flere, det har vi ikke haft tid til at checke. Det gælder jo nemlig, hvis vi sætter $p = ah^2 + 2bhk + ck^2$, at

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ah + bk \\ bh + ck \end{bmatrix} = \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial h} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial k} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial h} \\ \frac{\partial p}{\partial k} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

Vi har altså her at gøre med en konstant gange gradienten til polynomiet. Denne ses tydeligt kun at være 0 i punktet (0, 0). I dette punkt undersøges altså de forskellige 2. ordens afledede som beskrevet hos ETP.

Men fjerner man den anden vektor og kigger på matricen A, ses det, at:

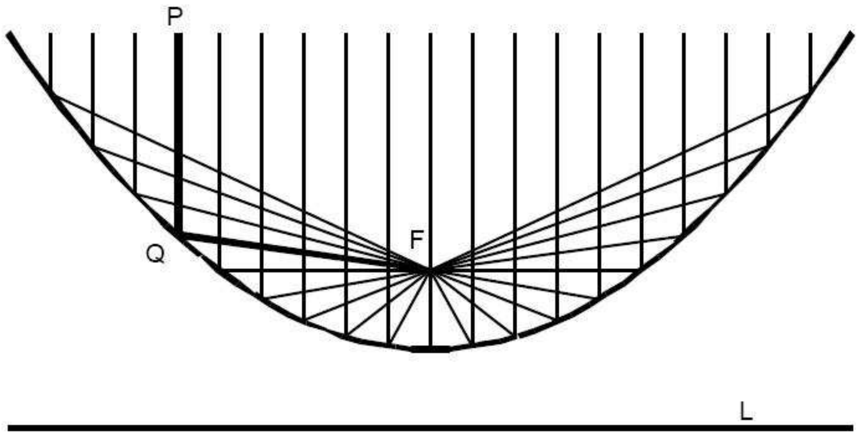
$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial h^2} & \frac{\partial^2 p}{\partial h \partial k} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial k \partial h} & \frac{\partial^2 p}{\partial k^2} \end{bmatrix}$$

Altså: Med undtagelse af en faktor $\frac{1}{2}$ er vores velkendte a, b og c lig med hhv. A, B og C i ABC-kriteriet. Herfra er vi altså på hjemmebane; vi har netop vist, at hvis $b^2 < ac, a > 0$, er $p \geq 0$. Men da $p \neq 0$ for alle $(x, y) \neq (0, 0)$, er funktionen voksende i alle retninger, og der er et lokalt (og globalt) ekstremum. Ligeledes kan det på tilsvarende vis vises, at det samme er gældende for $b^2 < ac, a < 0$.
For $b^2 > ac$ har vi meget analogt tidligere vist, at funktionen antager både positive og negative værdier. Men da vi ved, at $p(x, y) \neq 0$ for alle $(x, y) \neq (0, 0)$ *og* at det samme gælder for gradienten, følger det, at funktionen må have saddelpunkt i $(0, 0)$.

3 Opgave 3

Vis ud fra den geometriske definition af parablen, at den korteste afstand fra brændpunktet F til et punkt P som på figuren via et punkt Q' på parablen opnås når Q' er punktet Q på figuren, altså når retningen PQ' er vinkelret på ledelinjen.

Svar:



Først bemærkes, at $|PQ'| + |Q'F| = |PQ'| + |Q'L|$.
Det antages velkendt, at den korteste distance mellem P og L er den vinkelrette afstand. Afstanden $|PQ'| + |Q'L|$ er derfor kortest, hvor Q' ligger lodret under L, netop hvor Q placering på figuren i opgaveteksten. Da $|PQ'| + |Q'F| = |PQ'| + |Q'L|$, og $|PQ'| + |Q'L|$ antager sin mindsteværdi, hvor $Q' = Q$, antager også $|PQ'| + |Q'F|$ sin mindsteværdi her.

4 Opgave 4

(a) Vis, at hvis $F_1 = (-\gamma, 0), F_2 = (\gamma, 0)$ og $P = (x, y)$ opfylder ellipsebetingelsen $|PF_1| + |PF_2| = 2\alpha$, da vil

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

hvor $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$.

Svar: Vi tager udgangspunkt i ligningen $|PF_1| = 2\alpha - |PF_2|$. Ved Pythagoras' bliver dette til:

$$\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = 2\alpha - \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}.$$

Dette kvadreres (acceptabelt, da vi skal vise en implikation - skulle det vises den anden vej, ville det blive en smule mere tricky), og vi får:

$$(x+\gamma)^2 + y^2 = 4\alpha^2 + (x-\gamma)^2 + y^2 - 4\alpha\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}.$$

Heraf får vi, ved en del mellemregninger:

$$x^2 + \gamma^2 + y^2 = \alpha^2 + \frac{\gamma^2 x^2}{\alpha^2}.$$

Introduceres nu konstanten $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$, fås:

$$x^2 + y^2 = \beta^2 + \frac{\gamma^2 x^2}{\alpha^2},$$

hvoraf

$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{\gamma^2 x^2}{\alpha^2 \beta^2} = 1.$$

For at vise hvad der bedes om i opgaven, mangler vi altså nu at vise, at

$$\frac{x^2}{\beta^2} - \frac{\gamma^2 x^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{x^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta^2} - \frac{\gamma^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Hvis vi nu regner lidt på venstresiden får vi:

$$\frac{1}{\beta^2} - \frac{\gamma^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}(1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}) = \frac{\gamma^2}{\beta^2}(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\alpha^2}).$$

Hvis vi nu ganger igennem med β og herefter opløser β fås:

$$\gamma^2(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\alpha^2}) = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow 1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = 1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2},$$

Hvilket tydeligvis er sandt. Hermed er det altså vist, at hvis $|PF_1| + |PF_2| = 2\alpha$, så er

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

(b) Nedenfor er vist en typisk ellipse med brændpunkterne indtegnet:

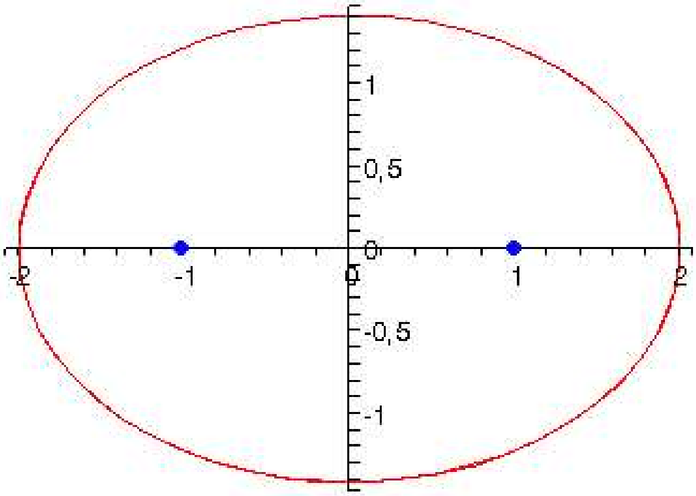
5 Opgave 5

(a) Betraget ligningen $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$. Vis, at ligningen beskriver en ellipse, hvis $b^2 < ac$ og $a > 0$. Vis, at ligningen beskriver en hyperbel, hvis $b^2 > ac$.

Svar: Vi har tidligere vist, at hvis vi har en kvadratisk form, kan den repræsenteres ved en symmetrisk matrix A på standardbasen for $\mathbb{R}^n$. Desuden har vi vist, at A kan diagonaliseres ved skift til en ortonormalbasis for $\mathbb{R}^n$. I opgave 2 viste vi, at hvis A er symmetrisk og P ortogonal, er

$$\mathbf{y}^t D \mathbf{y} = \mathbf{x}^t A \mathbf{x},$$

et udtryk for, at vinkler og afstande er bevaret ved ortonormal transformation. Vi kan altså roligt betragte den kvadratiske form på dens



Figur 1: Ellipse m. parameterfremstilling: $2 \cdot \cos(t), \sqrt{2} \cdot \sin(t), t \in [0; 2\pi], brændpunkter : (0, \pm 1)$

diagonalform. Fra opgave 4(b) har vi, at den kvadratiske form på de nye koordinater bliver:

$$\mathbf{y}^t D\mathbf{y} = \lambda_1 m^2 + \lambda_2 n^2,$$

hvor m og n er de nye basisvektorer.

Herfra vil vi se på de to tilfælde hver for sig:

$b^2 < ac, a > 0$: I dette tilfælde vides det, at de to egenværdier begger er strengt positive. Så sætter vi $\frac{1}{\alpha^2}$, som jo er et positivt tal, lig λ_1, og på samme måde sættes $\frac{1}{\beta^2} = \lambda_2$. Da bliver ligningen:

$$\lambda_1 m^2 + \lambda_2 n^2 = \frac{m^2}{\alpha^2} + \frac{n^2}{\beta^2} = 1,$$

Som jo netop er ligningen for en ellipse. Da figuren ikke ændres ved ortonormaltransformation er der således også tale om en ellipse på standardbasen for $\mathbb{R}^2$.

$b^2 > ac$: I dette tilfælde vides, at λ_1 og λ_2 har forskelligt fortegn. Igen ses på de to forskellige tilfælde:

- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$: Her sættes $\lambda_1 = \frac{1}{\alpha^2}, \lambda_2 = \frac{-1}{\beta^2}$. Dette er vi frie til at gøre, idet der i den hidtidige behandling af disse konstanter intet er antaget om deres størrelse.
  Da bliver ligningen:
  $$\lambda_1 m^2 + \lambda^2 n^2 = \frac{m^2}{\alpha^2} - \frac{n^2}{\beta^2} = 1,$$
  som jo er ligningen for en hyperbel.
- $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$: Her sættes $\lambda_1 = \frac{-1}{\beta^2}, \lambda_2 = \frac{1}{\alpha^2}$.
  Da bliver ligningen:
  $$\lambda_1 m^2 + \lambda_2 n^2 = \frac{n^2}{\alpha^2} - \frac{m^2}{\beta^2} = 1,$$
  igen ligningen for en hyperbel. Det bemærkes, at der er byttet om på rækkefølgen af basisvektorerne i denne ligning; igen tilladt da der ikke i det foregående ikke er antaget noget om deres rækkefølge.

(b) Vis, at snittet mellem dobbeltkeglen og planen

$$2z - x = 1$$

er en ellipse.

Svar: Vi starter med at iagttage, at

$$2z - x = 1 \Leftrightarrow z = \frac{x+1}{2}.$$

Indsætter vi dette i kegleligningen fås:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4},$$

hvoraf

$$3x^2 - 2x = +4y^2 = 1$$

Venstresiden ligner klart noget med kvadratet på en toleddet størrelse - der mangler bare noget, som vi indtil videre kalder k, og skriver:

$$3(x - \frac{1}{3})^2 + y = 1 + k.$$

Inden vi går videre skal k lige findes:

$$3(x - \frac{1}{3})^2 = 3(x^2 - \frac{1}{9} + \frac{2x}{3}) = 3x^2 - \frac{1}{3} + 2x,$$

hvoraf det ses, at $k = \frac{1}{3}$, hvilket indsættes i udtrykket:

$$3(x - \frac{1}{3})^2 + 4y^2 = \frac{4}{3}.$$

Vi substituerer nu $x - \frac{1}{3} = s$. En transformation, der hverken ændrer på afstand eller vinkel. Dette indsættes og vi får:

$$3s^2 + 4y^2 = \frac{s^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

hvoraf:

$$\frac{s^2}{(\frac{2}{3})^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = 1.$$

Hvad vi har bevist nu er dog bare, at snitkurven *projiceret ned på xy-planen* er en ellipse. Dermed er det jo ikke nødvendigvis givet, at den faktisk er det før projektionen. Imidlertid er ellipsen den eneste begrænsede kvadratiske kurve, og da en ubegrænset kurve ikke kan projicere over i en begrænset eller omvendt, er den også en ellipse på den oprindelige plan.

6 Opgave 6

Undersøg snit mellem dobbeltkeglen og en plan gennem (1, 0, 1), og find kriterier for hvornår de er henholdsvis ellipser, hyperbler og parabler.

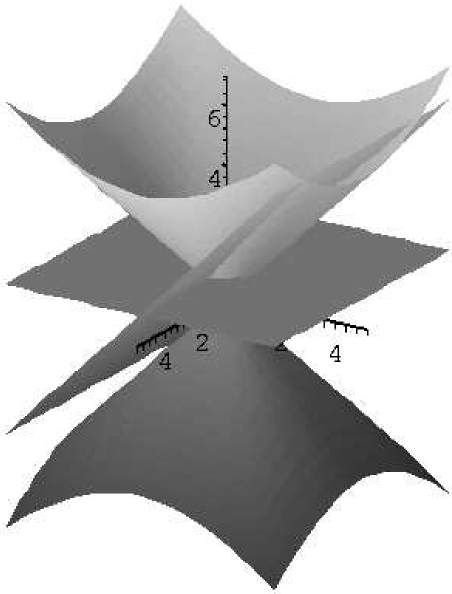
Svar: Planer gennem (1, 0, 1) er givet ved ligningen

$$ax + by + cz = a + c \tag{3}$$

I dette tilfælde vil vi sætte a, der er et udtryk for planens hældningskoefficient langs x-aksen, lig 0. Pga. rotationssymmetri vil det være illustrativt også for andre orienteringer af planen.[1] Altså har vi:

$$by + cz = c \tag{4}$$

[1] Der er dog særtilfælde - se senere



Figur 2: Dobbeltkegle gennemskåret af to planer gennem (1.0.1). Den ene er vandret, her er snitkurven en cirkel. Den anden er parallel med linjen $x = z$, dér er snitfladen en parabel. Imellem disse to er snitfladen en ellipse, ved højere hældning af planen fås en hyperbel. Desuden er der et par specialtilfælde.

som ligning for planen. Først betragtes specialtilfældet, hvor $b = c$. Af dette fås, at $y = 1 - z$, hvilket indsættes i kegleligningen:

$$x^2 + (1 - z)^2 = z^2,$$

hvoraf

$$x^2 + 1 + z^2 - 2z = z^2$$

og slutteligt

$$z = \frac{1}{2}x^2 \tag{5}$$

Tydeligvis en parabel i xz-planen, men er den det også i snitfladen? I hvert fald er det i snitfladen en ubegrænset 2.gradskurve, og det ses også nemt, at den kun antager positive værdier i z, hvorfor den må være en parabel også i snitfladen.

I tilfældet $b \neq c$ bliver det lidt mere kompliceret. Her tager vi først planens ligning og isolerer igen y:

$$y = \frac{c - cz}{b} \tag{6}$$

hvilket indsættes i ligningen for keglen, så vi får:

$$x^2 + \left(\frac{c - cz}{b}\right)^2 = z^2 \tag{7}$$

hvoraf vi via nogle mellemregninger får

$$\frac{b^2}{b^2 - c^2}x^2 + \frac{c^2}{b^2 - c^2} = z^2 + 2\frac{c^2}{b^2 - c^2}z \tag{8}$$

Igen ligner højresiden noget med et kvadrat på en toleddet størrelse, og ganske rigtigt:

$$z^2 + 2\frac{c^2}{b^2 - c^2}z = \left(z + \frac{c^2}{b^2 - c^2}\right)^2 - \left(\frac{c^2}{b^2 - c^2}\right)^2,$$

hvilket vi udnytter i ligningen ovenfor:

$$\frac{b^2}{b^2 - c^2}x^2 + \frac{c^2}{b^2 - c^2} = \left(z + \frac{c^2}{b^2 - c^2}\right)^2 - \left(\frac{c^2}{b^2 - c^2}\right)^2 \tag{9}$$

hvoraf igen

$$\left(z + \frac{c^2}{b^2 - c^2}\right)^2 - \frac{b^2}{b^2 - c^2}x^2 = \left(\frac{c^2}{b^2 - c^2} + \left(\frac{c^2}{b^2 - c^2}\right)^2\right) \tag{10}$$

Nu sættes

$$\left(\frac{c^2}{b^2 - c^2} + \left(\frac{c^2}{b^2 - c^2}\right)^2\right) = k.$$

Det kan vises, at $k > 0$ overalt. Samtidig substitueres

$$z' = z + \frac{c^2}{b^2 - c^2},$$

en additiv koordinatforskydning, der intet ændrer ved geometrien, og vi får:

$$\frac{1}{k}z'^2 + \frac{b^2}{k(b^2 - c^2)}x^2 = 1 \tag{11}$$

Sæt nu $k = \alpha^2$. Vi har da:

$$\frac{1}{\alpha^2}z'^2 + \frac{b^2}{k(b^2 - c^2)}x^2 = 1.$$

Nu observeres, at hvis $c > b$, da er koefficienten foran x^2 negativ, og den er tilsvarende positiv, hvis $c < b$.

- For $c > b$: Sæt nu
$$\frac{b^2}{k(b^2 - c^2)} = -\frac{1}{\beta^2}.$$
Da har vi:
$$\frac{1}{\alpha^2} z'^2 - \frac{1}{\beta^2} x^2 = 1,$$
som er ligningen for en *hyperbel.*
- For $c < b$: Sæt nu
$$\frac{b^2}{k(b^2 - c^2)} = \frac{1}{\beta^2}.$$
Da fås:
$$\frac{1}{\alpha^2} z'^2 + \frac{1}{\beta^2} x^2 = 1,$$
Hvilket tydeligvis er ligningen for en *ellipse.*

Det skal dog siges, at vi her arbejder under den antagelse, at $b \neq 0$ og $c \neq 0$, idet $b = 0$ eller $c = 0$ gør vores udtryk lidt problematiske. Men heldigvis er disse temmelig nemme at se på uden substitutioner og andet pjank, hvis vi nemlig i planens ligning sætter $a = 0$ og $b = 0$ fås, at $cz = c$ og dermed $z = 1$. Indsættes dette i kegleligningen fås, at $x^2 + y^2 = 1$, som er enhedscirklen.

Indsættes i planens ligning $a = 0$ og $c = 0$ fås, at $by = 0$ og derfor i kegleligningen $x^2 = z^2$, som er de to linjer $z = x$ og $z = -x$, hvor planen $y = 0$ skærer dobbeltkeglen.

Der er desuden endnu et interessant specialtilfælde, nemlig hvor planen $x = z$ tangerer dobbeltkeglen, og den fremkomne skæringsmængde er den rette linje $x = z$ med $y = 0$.

7 Opgave 7

Bevis variationsprincippet som opgivet i opgaveteksten.

Svar: Udnytter vi, at en kvadratisk form altid kan repræsenteres ved en symmetrisk matrix, dvs. hvor $a_{ij} = a_{ji}$, kan den kvadratiske form i n variable kan skrives som
$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j a_{ij}$$

Gradienten for den kvadratiske form kan derfor findes som:
$$\nabla q(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j a_{ij}\right)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j a_{ij}\right)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n x_j a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n x_j a_{nj} \end{bmatrix},$$

Hvor det sidste led kommer af, at alle led der ikke indeholder x_i forsvinder ved differentiationen. Alle blandede led indeholdende x_i optræder to gange pga. symmetrien i matricen, og alle led indeholdende x_i^2 får en faktor 2 foran ved differentiation.

Men denne vektor ses jo netop at være lig $2A\mathbf{x}$, hvoraf:

$$\nabla q(\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}$$

Da vi koncentrerer os om enhedskuglefladen har vi altså restriktionen $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$. Vi sætter defor

$$g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Heraf fås så, at

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^2}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n^2}{\partial x_n} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 2\mathbf{x}.$$

Det bemærkes, at $\nabla g(\mathbf{x}) \neq 0$ overalt på enhedskuglefladen.

Vi anvender nu Lagrange's metode, og søger en Lagrange-multiplikator $\nabla q(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$. Vi indsætter $\nabla q(\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}$ og $\nabla g(\mathbf{x})$:

$$2A\mathbf{x} = 2\lambda\mathbf{x},$$

hvoraf

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Det ses straks, at dette netop er definitionen på egenværdier. Lagrange-multiplikatoren for den kvadratiske form på enhedskuglefladen er altså netop dens egenværdier. Men hvis $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, så gælder det jo også, at

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \mathbf{x}^t \lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^t\mathbf{x} = \lambda.$$

Af det sidste ses klart, at $q(\mathbf{x})$ har maksimum og minimum i den største hhv mindste egenværdi.

8 Fortolkning af egenværdierne for en kvadratisk form.

Vi kigger på en vilkårlig kvadratisk form, under bibetingelsen $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$, altså de punkter på den kvadratiske form, hvor stedvektoren bestående af de uafhængige variable har længden 1. Variationsprincippet udsiger nu, at der findes punkter på niveaukurven og enhedskuglen, hvor gradienten for enhedskuglen og niveaukurven vil være ens, bortset fra skaleringsfaktorer, som viser sig at være egenværdierne for den symmetriske matrix, der repræsenterer den givne kvadratiske form. Ud fra symmetriargumenter kan det indses, at der altid vil være mindst dobbelt så mange af disse punkter, som der er egenværdier, med hensyn til multiplicitet, og punkterne vil parvis deles om en egenværdi. For to dimensioner er der altså fire af disse punkter, og vi kan se koblingen til ABC-kriteret, for hvis der er to positive egenværdier med, vil den kvadratiske form vokse i samme retning som den kvadratiske enhedsform, dvs. den kvadratiske form der, under bibetingelsen $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$, giver enhedskuglen (i to dimentioner, enhedscirklen), i alle de punkter, hvor gradienterne er parallelle. Den kvadratiske form vil da have et minimumspunkt (evt. et maksimumspunkt, hvis vi har to negative egenværdier). Når vi har en negativ og en positiv egenværdi, da vil den kvadratiske form vokse i samme retning som den kvadratiske enhedsform i de to punkter, hvor gradienterne er parallelle, og modsat i de to, hvor gradienterne er antiparallelle. Den kvadratiske form må derfor have et saddelpunkt.