

Fysik 6

Elektrodynamik
John Niclasen

Indhold

1. Fourier Transformation

- 1.1 Fourier Serier
- 1.2 Fourier Integraler

2. Bølger

- 2.1 Stående Bølger
- 2.2 Bølger i 3D
- 2.3 Interferens

1. Fourier Transformation

Symboler

| Symbol | Forklaring |
|---------------|----------------------------------|
| c | Koefficient |
| n | Heltal |
| T | Periode |
| t | Tid |
| ε | Elektromotorisk kraft (emf) |
| ω | Vinkelfrekvens (Vinkelhastighed) |

1.1 Fourier Serier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{-i\omega_n t}$$
$$\tilde{c}_n = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) e^{i\omega_n t}$$
$$\omega_n = \frac{n 2\pi}{T}$$

1.1.1 Eksempel: Rektangulær pulse

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_0 & , \quad 0 + nT \leq t \leq T/2 + nT \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ -\varepsilon_0 & , \quad T/2 + nT \leq t \leq T + nT \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \varepsilon(t) e^{i\omega_n t} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{T} \left(\int_0^{T/2} dt e^{i\omega_n t} - \int_{T/2}^T dt e^{i\omega_n t} \right) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{T} \left(\frac{1}{i\omega_n} [e^{i\omega_n t}]_0^{T/2} - \frac{1}{i\omega_n} [e^{i\omega_n t}]_{T/2}^T \right) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{i 2\pi n} (2e^{in\pi} - 2) \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ lige} \\ \frac{i2\varepsilon_0}{\pi n} & n \text{ ulige} \end{cases} \end{aligned}$$

Check for division med nul! Så \tilde{c}_0 må beregnes separat:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \varepsilon(t) e^{i\omega_0 t} \\ \omega_0 &= \frac{0 \cdot 2\pi}{T} = 0 \\ \Rightarrow \tilde{c}_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \varepsilon(t) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{T} \left(\int_0^{T/2} dt - \int_{T/2}^T dt \right) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{T} \left(\frac{T}{2} - T + \frac{T}{2} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \sum_{n=-\infty, n \text{ ulige}}^{\infty} \frac{2\varepsilon_0}{\pi n} e^{-in\omega t} \\ &= \sum_{n=1, n \text{ ulige}}^{\infty} \frac{i2\varepsilon_0}{\pi n} (e^{-in\omega t} - e^{in\omega t}) \\ &= \sum_{n=1, n \text{ ulige}}^{\infty} \frac{4\varepsilon_0}{\pi n} \sin(n\omega t)\end{aligned}$$

1.2 Fourier Integraler

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) \\ f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega)\end{aligned}$$

1.2.1 Eksempel: Eksponential funktion

$$\begin{aligned}f(t) &= e^{-\gamma|t|} \\ \tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} e^{-\gamma|t|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 dt e^{i\omega t} e^{\gamma t} + \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} e^{-\gamma t} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\gamma + i\omega} + \frac{1}{\gamma - i\omega} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

2. Bølger

Symboler

| Symbol | Forklaring |
|--------|------------|
| A | Amplitude |
| k | Konstant |
| L | Længde |

| | |
|-----------|----------------------------------|
| n | Heltal |
| \vec{r} | Retningsvektor |
| T | Tension (Målt i Newton) |
| t | Tid |
| v | Hastighed |
| z | Afstand (hen ad strengen) |
| δ | Fase |
| λ | Bølgelængde |
| μ | Massefylde |
| ω | Vinkelfrekvens (Vinkelhastighed) |

2.1 Stående Bølger

2.1.1 Grænsebetingelser

$$f(0, t) = f(L, t) = 0$$

2.1.2 Diskrete Frekvenser

$$\omega_n = n \frac{v\pi}{L}$$

2.1.3 Stående Bølger

$$f_n(z, t) = A \sin(k_n z) \cos(\omega_n t)$$

$$k_n = \frac{\omega_n}{v}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Da sin og cos leddene leverer værdier mellem -1 og 1 , er A den egentlige amplitude. Leddet

$$\sin(k_n z)$$

er uafhængig af tiden og bestemmer den maksimale amplitude ethvert sted på strengen. Leddet

$$\cos(\omega_n t)$$

får den stående bølge til at svinge med tiden.

Funktion der beskriver mange stående bølger på een gang:

$$f(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k_n z) \cos(\omega_n t)$$

2.2 Bølger i 3D

2.2.1 Wave Equation

Bølgefunktionen

$$\bar{\nabla}^2 f(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

2.2.2 Plane Bølger

Plane bølger er her bølger, der strækker sig til uendeligt i x - og y -retningen og bevæger sig i z -retningen. Altså ikke som bølgerne på havet.

Den komplekse funktion

$$\tilde{f}(\vec{r}, t) = \tilde{A} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

er en løsning til bølgefunktionen, hvis

$$\omega = v k$$

Hvis \vec{k} er i z -retningen, og vi ser på den reelle løsning:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= |\tilde{A}| e^{i\delta} \\ \Rightarrow |\tilde{f}(\vec{r}, t)| &= |\tilde{A}| \cos(kz - \omega t + \delta) \end{aligned}$$

hvilket minder om løsningen for stående bølger på en streng.

2.2.3 Sfæriske Bølger

Den komplekse funktion

$$\tilde{f}(\vec{r}, t) = \tilde{A} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}$$

er en løsning til bølgefunktionen, hvis

$$\omega = v k$$

Hvis man kigger på et lille område omkring punktet z_0 langt fra udbredelsespunktet (origo) gælder:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\vec{r}, t) &\approx \tilde{A} \frac{e^{i(k(z_0 + z') - \omega t)}}{z_0} \\ &= \tilde{A}' e^{i(kz' - \omega t)}, \quad \tilde{A}' = \tilde{A} \frac{e^{ikz_0}}{z_0} \end{aligned}$$

hvilket blot er en plan bølge.

2.3 Interferens

2.3.1 Bølgefunktionen

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^2 f &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= v^2 \bar{\nabla}^2 f \end{aligned}$$

Hvis f_1 og f_2 er løsninger, så er $f_1 + f_2$ også en løsning.

2.3.2 Rumlig Interferens

2 bølger, som bevæger sig i modsat retning:

$$\tilde{f}(z, t) = \tilde{A} e^{i(kz - \omega t)} + \tilde{A} e^{i(-kz - \omega t)}$$

$$= 2\tilde{A} \cos(kz) e^{-i\omega t}$$

2.3.3 2 Højttalere

$$\tilde{f} = \tilde{A} \left(\frac{e^{i(kr_+ - \omega t)}}{r_+} + \frac{e^{i(kr_- - \omega t)}}{r_-} \right)$$

Ved at sætte $r \approx r_{\pm}$:

$$\tilde{f} = \frac{2\tilde{A} e^{i(k(r_+ + r_-)/2 - \omega t)}}{r} \cos\left(k \frac{r_+ - r_-}{2}\right)$$

Der er konstruktiv interferens, når:

$$\begin{aligned} \cos\left(k \frac{r_+ - r_-}{2}\right) &= \pm 1 \\ \Leftrightarrow k(r_+ - r_-) &= n2\pi \\ \Leftrightarrow r_+ - r_- &= n\lambda \end{aligned}$$

Der er destruktiv interferens, når:

$$\begin{aligned} \cos\left(k \frac{r_+ - r_-}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow k(r_+ - r_-) &= n2\pi + \pi \\ \Leftrightarrow r_+ - r_- &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \end{aligned}$$

Langt fra origo ved $z = z_0$ gælder:

$$\begin{aligned} r_{\pm} &\approx z_0 + \frac{(x \mp L/2)^2 + y^2}{2z_0} \\ \Rightarrow r_+ - r_- &\approx -\frac{Lx}{z_0} \\ \Rightarrow \cos\left(k \frac{r_+ - r_-}{2}\right) &\approx \cos\left(\frac{kLx}{2z_0}\right) \end{aligned}$$

Hvilket betyder, at der er konstruktiv interferens, når:

$$x = \frac{n\lambda z_0}{L}$$

Afstanden mellem striber med konstruktiv eller destruktiv interferens er:

$$\Delta x = \frac{\lambda z_0}{L}$$

2.3.4 Alternativ Uledning

$$\tilde{f} = \tilde{A} \left(\frac{e^{i(kr_+ - \omega t)}}{r_+} + \frac{e^{i(kr_- - \omega t)}}{r_-} \right)$$

Ved at sætte $r_+ \approx r_-$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\vec{r}, t) &= \frac{\tilde{A}}{r} (e^{ikr_+} + e^{ikr_-}) e^{-i\omega t} \\ \tilde{f}(\vec{r}, t) &= |\tilde{C}(\vec{r})| e^{-i(\omega t - \delta(\vec{r}))} \\ |\tilde{C}(\vec{r})|^2 &= \frac{|\tilde{A}|^2}{r^2} (2 + 2 \cos(k(r_+ - r_-))) \end{aligned}$$

, hvor $\delta(\vec{r})$ er fasen. For at se interferensen er man typisk kun interesseret i størrelsen af \tilde{C} , da den reelle oscillation er:

$$f(\vec{r}, t) = |\tilde{C}(\vec{r})| \cos(\omega t - \delta(\vec{r}))$$

Der er destruktiv interferens, når $|\tilde{C}| = 0$ og konstruktiv interferens, når $|\tilde{C}|$ er max, hvorfor man ikke behøver at kende δ .

2.3.5 Tidslig Interferens

2 1D-bølger med forskellig frekvenser:

$$\tilde{f}_1(z, t) = \tilde{A} e^{i(k_1 z - \omega_1 t)}$$

$$\tilde{f}_2(z, t) = \tilde{A} e^{i(k_2 z - \omega_2 t)}$$

$$k_i = \frac{\omega_i}{v}$$

$$\tilde{f}(0, t) = 2\tilde{A} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t/2}$$

Den sidste formel kan opfattes som en bølge oscillerende med frekvensen $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ og med en amplitude oscillerende i tiden som $\cos((\omega_1 - \omega_2)t/2)$