ØRSTED LABORATORIET

NIELS BOHR INSTITUTET

Universitetsparken 5
2100 København

Telefon 35 32 18 18
Direkte 35 32 04 23
Telefax 35 32 04 60
Email jens@fys.ku.dk

Matematik G, Ugeseddel 23 — Uge 13 1998

I fredags afsluttede jeg gennemgangen af kapitlet om tensorer. Ved regneøvelsen i dag (torsdag den 26. marts) fik vi regnet opgave VI, samt 19.16, 19.17, og 19.18. De tre sidste opgaver kan betragtes som slutstenen på vores tensor-bygningsværk. Ved at regne opgave (19.17) fik vi ved en variationsregning vist, at (19.99) er ligningen for en "geodesic" (den korteste kurve mellem to punkter). Opgave (19.18) førte os frem til det vigtige resultat, at den kovariante afledede af den metriske tensor er 0.

Opgave 19.16 indfører *Riemann–Christoffel* tensoren R^l_{ijk}, en tensor af fjerde orden. Af denne kan ved kontraktion dannes en anden ordens tensor, *Den symmetriske Ricci tensor* $R_{ij} = R^k_{ijk}$ og en skalar $R = R^i_i = g^{ij} R_{ij}$, som kaldes *kurvatur invarianten.* R afhænger kun af første og anden afledede af den metriske tensor og Gauss har vist at R er den eneste skalare størrelse, der kan dannes med denne egenskab. R^l_{ijk} og tensorerne dannet ud fra denne er alle 0 i et euklidisk rum. Et ikke-euklidisk rum kan eksempelvis etableres ved at fastholde en dimension i et "normalt" euklidisk rum (en sådan "overflade" kaldes en *manifold* eller *mangfoldighed*). Vi vil som et eksempel vælge en kugleoverflade, dvs. benytte et sfærisk koordinatsystem med et konstant $r = r_0$. Den Gaussiske krumning af kugleoverfladen er $K = 1/r_0^2$, og ved en direkte udregning (vil blive gennemgået i morgen) kan det vises at kurvatur invarianten er proportional med "rummets krumning", $R = -2K$.

I sin opstilling af den generelle relativitetsteori udnyttede Einstein, at den inertielle masse (massen i Newtons 2. lov) er den samme som (proportional med) den gravitationelle masse (massen i gravitationskraften). Det betyder at det er muligt (lokalt set) at transformere til et (kurvelineart) koordinatsystem, hvor gravitationskraften fra omgivende massefordelinger forsvinder (elevator i frit fald). I dette koordinatsystem skal den specielle relativitetsteori gælde, hvor Lorentz invariansen sikres ved at indføre det firedimensionale Minkowski rum med $(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - c^2(dt)^2$, som ikke er positiv definit. Desuden skal divergensen af den generaliserede "impuls–energi tensor" være 0 (svarende til at den tidsafledede af impulsen er 0, når der ikke er nogen ydre kraft). Denne generaliserede "impuls–energi tensor" må være den samme som optræder (indføres) i den specielle relativitetsteori, T_{ij} [hvor generaliseringen af Newtons 2. lov er $F^j = T^{ij}_{;i} = 0$ når der ikke er nogen ydre krafter], plus et led som skyldes koordinattransformationen (den omkringliggende masse og energifordeling). Dette nye led skal være en anden ordens tensor og kan kun afhænge af det nye koordinatsystems egensskaber (dvs. kun den metriske tensor og dens afledede kan indgå), desuden skal divergensen af dette nye led være nul. Det simpleste valg (og eneste valg, hvis man vil undgå højere afledede end 2. ordens) er et led proportionalt med *Einsteins tensor*

$$G^{ij} = R^{ij} - \tfrac{1}{2} g^{ij} R$$

idet det kan vises (lidt uventet og lettere kompliceret) at $R_{;i} = [g_{kl} R^{kl}]_{;i} = 2 g_{ik} R^{kl}_{;l}$, og dermed at $G^{ij}_{;i} = 0$. Bevarelse af impuls og energi kan således skrives

$$\kappa T_{ij} + G_{ij} = \lambda g_{ij}$$

(og tilsvarende for de kontravariante komponenter), hvor λ er en arbitrær konstant og $\kappa = 8\pi G/c^4$ (G er gravitationskonstanten) bestemmes af, at den Newton'ske gravitationsligning skal gælde i den ikke-relativistiske grænse.

Efter disse bemærkninger, som skulle antyde hvor tæt I er kommet til at kunne formulere Einsteins feltligning i den generelle relativitetsteori, vender vi tilbage til de mere jordnære ting. I anden time i morgen (fredag) vil vi starte på gruppeteorien, og jeg regner med at nå de to første afsnit i noterne, samt nogle sider af afsnit 3 om den symmetriske gruppe. På torsdag den 2. april er opgaverne

1, 2, 5, 6, 7, 9, 10

i noterne om gruppeteori.

Jens Jensen

26-3-98