ØRSTED LABORATORIET
NIELS BOHR INSTITUTET

Universitetsparken 5
2100 København

Telefon 35 32 18 18
Direkte 35 32 04 23
Telefax 35 32 04 60
Email jens@fys.ku.dk

Matematik G, Ugeseddel 21 Uge 11 1998

Fredag den 13. marts, har jeg gennemgået afsnit 19.16 – 19.18. Vi skal undersøge tensorers egenskaber, når vi transformerer fra et generelt kurvelineart koordinatsystem til et andet. Vi skal indføre følgende betegnelser

Christoffel-symbol af første art:
$$[ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right) \tag{1}$$

og

Christoffel-symbol af anden art:
$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} = \vec{e}^k \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial u^j} \tag{2}$$

I noterne betegnes de to symboler: $\Gamma_{ijk} = [ij,k]$ (se opgave 19.18) og $\Gamma^k_{ij} = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}$.
Med indførelsen af Christoffel-symbol af første art kan ligning (19.80) skrives:

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ ij \end{matrix} \right\} = g^{mk}[ij,k] \tag{3}$$

I denne uge er opgaverne: I, II, og III, og til næste regneøvelse, torsdag den 19. marts, er der følgende tre opgaver (der er også en bagside):

Opgave 19.14

Opgaven er lidt upræcist formuleret. Det differentielle volumenelement er $dV = |\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3| du^1 du^2 du^3$, hvor $|\cdots|$ angiver den numeriske værdi.

Opgaven suppleres med: Vis, at kvadratet på det differentielle linieelement $(ds)^2 = g_{ij} du^i du^j$ er en invariant (skalar) størrelse.

Opgave IV

Sfæriske koordinater (se opgave II i sidste uge): $u^1 = r$, $u^2 = \theta$, $u^3 = \phi$, hvor $x^1 = r\sin\theta\cos\phi$, $x^2 = r\sin\theta\sin\phi$, $x^3 = r\cos\theta$.

i) Bestem Christoffel-symbolerne af anden art direkte ud fra deres definition, ligning (2).

ii) Bestem Christoffel-symbolerne af første art, $[ij,k]$ og benyt ligning (3) til at kontrollere resultaterne fra i).

Opgave V

Et euklidisk rum er defineret som et rum, hvor det $\{g_{ij}\} > 0$. Dermed er kvadratet på længden af en vektor, $\vec{a} = a^i \vec{e}_i = a_j \vec{e}^j$, bestemt ved

$$a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a^i a_i = g_{ij} a^i a^j$$

en positiv definit størrelse (dvs. $a^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$, ellers $a^2 > 0$). I teorien om matricer og determinanter udledes sætningen: Den nødvendige og tilstrækkelige betingelse for at $\{x^1 \cdots x^n\}\{C_{ij}\}\{x^1 \cdots x^n\}^T$ er positiv definit er, at determinanten af $n \times n$ matricen $\{C_{ij}\}$ er positiv.

i) Vis, at det indre produkt $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B^i$ af to vektorer $\vec{A}$ og $\vec{B}$ er en invariant (skalar) størrelse.

Et euklidisk rum har dermed egenskaben, at $(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = g_{ij} du^i du^j$ er en invariant og positiv definit størrelse. Desuden kan vinklen θ mellem to vektorer bestemmes som:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{A_i B^i}{\sqrt{A_j A^j B_k B^k}} = \frac{g_{ij} A^i B^j}{\sqrt{g_{kl} g_{mn} A^k A^l B^m B^n}}$$

ii) Vis at $\cos\theta$ er en skalar.

iii) Find vinklerne mellem basisvektorerne for et generelt kurvelineart koordinatsystem i et tre dimensionalt euklidisk rum, udtrykt vha. g_{ij}.

Jens Jensen

12-3-98