Bevis for Teorem 4b i afsnit 23.3

Teorem 4:

Antallet af forskellige kombinationer med k elementer, der kan dannes ud af n forskellige elementer, er

uden gentagelser: $\binom{n}{k}$ med gentagelser: $\binom{n+k-1}{k}$

Det er teorem (4b), hvor de enkelte elementer kan optræde fra 0 til k gange i de enkelte kombinationer, der skal bevises.

Lærebogen foreslår at bevise sætningen ved induktion:

Teoremet er korrekt for $n = 1$ for en vilkårlig værdi af k: Der er kun den ene mulighed, at alle k elementer er ens.

Teoremet antages korrekt for $n - 1$ elementer (for en vilkårlig værdi af k), og skal med denne forudsætning vises at være gyldig for n elementer:

Vi starter med de $n - 1$ elementer og danner alle mulige kombinationer med k elementer (med gentagelser): $\binom{n-1+k-1}{k}$

Til disse muligheder skal vi addere alle dem, hvor det $n$te element optræder 1 gang, svarende til alle mulige kombinationer med $k-1$ elementer valgt ud blandt de resterende $n - 1$ elementer: $\binom{n-1+k-1-1}{k-1}$

Næste led er de kombinationer, hvor det $n$te element optræder to gange, og hvor der skal vælges $k - 2$ elementer ud af de $n - 1$ elementer, osv. indtil vi når frem til at alle k-elementer er det $n$te element, dvs. det samlede antal kombinationer er:

$$\binom{n+k-2}{k} + \binom{n+k-3}{k-1} + \binom{n+k-4}{k-2} + \cdots + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{1} + 1$$

som kan omskrives til

$$\sum_{s=0}^{k} \binom{n-2+s}{s} = \sum_{s=0}^{k} \binom{n-2+s}{n-2}$$

Benyttes ligning (13) i bogen (med k erstattet med $n-2$ og øverste sum grænse $n - 1$ med k) fås, at summen er lig

$$\binom{k+1+n-2}{n-2+1} = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} \qquad Q.E.D.$$

Ligning (13), som benyttes i beviset, kan igen bevises ved induktion samt brug af ligning (11) (som vi udledte ved regneøvelserne).

Alternativt bevis for Teorem 4b

Teorem 4b kan omformuleres til, at antallet af måder k kugler kan fordeles i n kasser er

$$\binom{n+k-1}{k}$$

hvis der ikke er begrænsninger på hvor mange kugler, der kan være i de enkelte kasser (svarende til Bose-statistik). En kugle i en kasse, svarer til at dette element er udtrukket.

De n kasser stilles på en række, og de k (sorte) kugler fordeles, fx som vist i figur a). De k kugler plus de $n-1$ skillevægge betragtes under et, angivet som hvide kugler i figur b). En vilkårlig kombination kan findes ved at udvælge k af de hvide kugler i b) til at være sorte og de resterende til at være skillevægge. Et eksempel er vist i figur c). Her er skillevæggene vist som hvide kugler, dvs. der er 1 kugle i 1. kasse, 0 i 2. kasse, 1 i 3. kasse, 2 i 4. kasse, osv. Antallet af kombinationer er derfor det samme som antallet af måder, vi kan udvælge k af de $n-1+k$ hvide kugler i b) til at være sorte kugler, hvilket netop er

$$\binom{n+k-1}{k}$$