Opgave 1

a) Idet Laplace-transformen af y betegnes $Y = \mathcal{L}\{y\}$ fås

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0) = sY - 1 = \mathcal{L}\{x-y\} = \frac{1}{s^2} - Y$$

eller

$$(s+1)Y = 1 + \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2(s+1)} = \underline{\frac{2}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}}$$

Den inverse Laplace-transformation af denne ligning giver resultatet:

$$y = y(x) = \underline{2\,e^{-x} + x - 1} \qquad ; \qquad y(1) = \underline{0.7358}$$

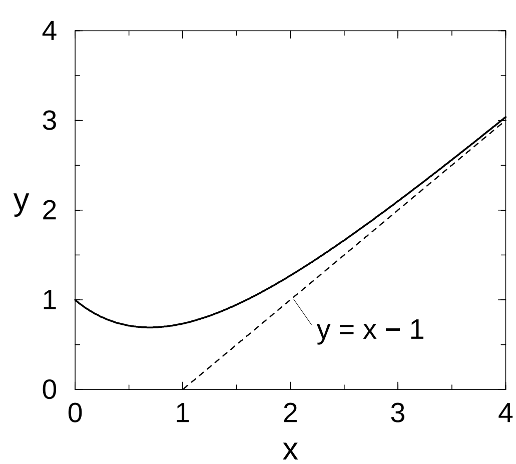
b) Runge-Kutta algoritmen er beskrevet i tabel 20.4 på side 1040. Her er $h = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, og $f(x,y) = x - y$:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0, y_0) = hf(0,1) = -1 \\
k_2 &= hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = hf(0.5, 0.5) = 0 \\
k_3 &= hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_2) = hf(0.5, 1) = -0.5 \\
k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = hf(1, 0.5) = 0.5
\end{aligned}$$

og dermed

$$y(1) \simeq y_1 = 1 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \tfrac{1}{6}(-1 + 0 - 1 + 0.5) = \underline{0.75}$$

c) Funktionen $y = y(x)$ går gennem $(x,y) = (0,1)$ med hældningen $y' = -1$ og gennem $(x,y) = (1, 0.7358)$ med hældningen $y' = x - y = 0.2642$.
y' skifter fortegn mellem de to punkter, og minimumspunktet bestemmes af $y' = x - y = -2\exp(-x) + 1 = 0$, som har løsningen
$x = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad y = \ln 2 = 0.6931$.
I grænsen $x \to \infty$ fås den asymptotiske opførsel $y(x) \to y = x - 1$.



Opgave 2

a) Sandsynlighederne er bestemt ved Poisson fordelingen, som har frekvensfunktionen:

$$f_P(x) = \frac{\mu^x}{x!}\, e^{-\mu} = \frac{2^x}{x!\, e^2}$$

hvor x er antallet af henfald i tidsintervallet $t = 2/\lambda$ og $\mu = \lambda t = 2$ er middelværdien. Dvs.

$$P(X \geq 3) = 1 - F_P(2) = 1 - f_P(0) - f_P(1) - f_P(2) = 1 - \frac{1}{e^2}\big(1+2+2\big) = \underline{0.3233}$$

(se også tabel A6 side A100).

b) I grænsen $\mu \gg 1$ er

$$f_P(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \quad \sigma = \sqrt{\mu}$$

Dvs.

$$P(\mu - \Delta\mu \leq X \leq \mu + \Delta\mu) = \int_{\mu-\Delta\mu}^{\mu+\Delta\mu} f_P(x) dx \simeq \Phi(\Delta\mu/\sigma) - \Phi(-\Delta\mu/\sigma) = 0.95$$

som medfører $\Delta\mu/\sigma = 1.960$ (tabel A8). Indsættes $\Delta\mu = 0.05\mu$ og $\sigma = \sqrt{\mu}$ fås

$$\frac{0.05\mu}{\sqrt{\mu}} = 1.960 \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \underline{1537}$$

c) I det generelle tilfælde er $\mu = \lambda t$ og $p(t) = f_P(0) = \exp(-\lambda t)$, dvs.

$$F(t) = \underline{1 - e^{-\lambda t}} \quad , \quad \text{for } t \geq 0$$

Med denne fordelingsfunktion fås:

$$f(t) = F'(t) = \underline{\lambda\, e^{-\lambda t}} \quad , \quad \text{for } t \geq 0$$

og

$$G(u) = \langle \exp(uT) \rangle = \int_0^\infty \lambda e^{(u-\lambda)t}\, dt = \left[\frac{\lambda}{u-\lambda} e^{-(\lambda-u)t}\right]_0^\infty = \underline{\frac{\lambda}{\lambda - u}}$$

idet det er forudsat at $\lambda - u > 0$. Momenterne kan beregnes direkte, men udnyttes den moment-genererende funktion fås:

$$\langle T \rangle = G'(0) = \left.\frac{\lambda}{(\lambda-u)^2}\right|_{u=0} = \underline{\lambda^{-1}}$$

$$\langle T^2 \rangle = G''(0) = \left.\frac{2\lambda}{(\lambda-u)^3}\right|_{u=0} = 2\lambda^{-2}$$

og dermed

$$\sigma^2 = \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2 = 2\lambda^{-2} - \lambda^{-2} = \underline{\lambda^{-2}}$$

Opgave 3

a) De kovariante basisvektorer er givet ved (19.50) eller (19.53): $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$, dvs.

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = \underline{(-\alpha, \beta, 0)} \quad ; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = \underline{(\beta, \alpha, 0)} \quad ; \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma} = \underline{(0, 0, -1)}$$

Heraf bestemmes den metriske tensors kovariante komponenter

$$\{g_{ij}\} = \{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j\} = \underline{\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2+\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad \text{og} \quad \sqrt{g} = \underline{\alpha^2+\beta^2}$$

Ifølge (19.63) er $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$ (g^{ij}-matricen er den inverse til g_{ij}-matricen):

$$\{g^{ij}\} = \{g_{ij}\}^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) Indsættes x, y, z i funktionsudtrykket fås: $f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2)^2 + \gamma^2$, og dermed

$$v_1 = \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \underline{\alpha(\alpha^2+\beta^2)} \quad ; \quad v_2 = \frac{\partial f}{\partial \beta} = \underline{\beta(\alpha^2+\beta^2)} \quad ; \quad v_3 = \frac{\partial f}{\partial \gamma} = \underline{2\gamma}$$
$$v^1 = g^{1j} v_j = \underline{\alpha} \quad ; \quad v^2 = g^{2j} v_j = \underline{\beta} \quad ; \quad v^3 = g^{3j} v_j = \underline{2\gamma}$$

Det indre produkt af $\mathbf{v}$ med sig selv er

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1 v^1 + v_2 v^2 + v_3 v^3 = \underline{(\alpha^2+\beta^2)^2 + 4\gamma^2} = 4f(\alpha, \beta, \gamma)$$

og ifølge (19.95) er $\quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{g}\, v^i\right)$

$$= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{(\alpha^2+\beta^2)\alpha\right\} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left\{(\alpha^2+\beta^2)\beta\right\} + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left\{(\alpha^2+\beta^2)2\gamma\right\}\right]$$
$$= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[3\alpha^2 + \beta^2 + 3\beta^2 + \alpha^2 + 2(\alpha^2+\beta^2)\right] = \underline{6}$$

Benyttes det kartesianske koordinatsystem fås:

$$\mathbf{v} = \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2(x, y, z) \quad , \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 4(x^2+y^2+z^2) \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 2+2+2 = 6$$

som er de samme resultater som ovenfor. Dette er i overensstemmelse med at $\mathbf{v}$ er en 1. ordens tensor og dermed at kontraktionerne $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ og $\nabla \cdot \mathbf{v}$ er skalare størrelser, der er uafhængige af koordinattransformationen.

Opgave 4

a) $b_i b_i = a^{-2i+2i} = a^0 = e$, som betyder, at $b_i^{-1} = b_i$ og at ordenen af de forskellige elementer er:

$$1.\ \text{orden: } e\,; \quad 2.\ \text{orden: } b_1,\, b_2,\, b_3,\, b_4,\, b_5\,; \quad 5.\ \text{orden: } a,\, a^2,\, a^3,\, a^4\,.$$

Udregning af de 4 konjugationer giver:

$$a^{-p}a^q a^p = \underline{a^q}$$
$$b_p^{-1}a^q b_p = b_p a^q b_p = b_p b_{2q+p} = a^{-2p+4q+2p} = a^{4q} = \underline{a^{-q}}$$
$$a^{-p}b_q a^p = a^{-p}b_{q+3p} = \underline{b_{p+q}}$$
$$b_p^{-1}b_q b_p = b_p a^{-2q+2p} = b_{p-6q+6p} = \underline{b_{2p-q}}$$

Resultaterne viser at G's konjugationsklasser er

$$K_e = \{e\}\,; \quad K_a = \{a,\, a^4\}\,; \quad K_{a^2} = \{a^2,\, a^3\}\,; \quad K_b = \{b_1,\, b_2,\, b_3,\, b_4,\, b_5\}$$

b) Antallet af ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer = antallet af konjugationsklasser = $\underline{4}$.

Repræsentationernes grader n_1-n_4 bestemmes af $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = r = 10$, som har løsningen $n_1 = n_2 = \underline{1}$ og $n_3 = n_4 = \underline{2}$.

Karaktertavle:

	K_e	$2K_a$	$2K_{a^2}$	$5K_b$
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1
E_1	2	x_1	y_1	z_1
E_2	2	x_2	y_2	z_2

Kommentarer til karaktertavlen:
1) $\chi(1) = n_i$
2) Alle konjugationsklasser indeholder både et element og dets inverse $\Rightarrow$ alle karakterer er reelle, og i de éndimensionale tilfælde er $\chi_A = \pm 1$.
3) Ortogonalitet af de to første rækker $\Rightarrow$ $\chi_{A_2}(K_b) = -1$ er eneste løsning.

De resterende 6 ubekendte kan bestemmes på følgende måde:

Normering af sidste søjle: $5[1^2 + (-1)^2 + z_1^2 + z_2^2] = 10 \quad \Rightarrow \quad \underline{z_1 = z_2 = 0}\,.$

Ortogonalitet af 1. og 2. søjle: $1 + 1 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1 - x_1$

Normering af 2. søjle: $2[1 + 1 + x_1^2 + x_2^2] = 10$, som ved indsættelse af x_2 giver $x_1^2 + x_1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \alpha = \underline{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1 - \alpha = \underline{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$
(andengradsligningen har rødderne α og $-1-\alpha$ og valget $x_1 = -1-\alpha$ vil kun betyde en ombytning af de to sidste rækker i karaktertavlen).
y_1 og y_2 bestemmes af de to samme ligninger. Benyttes fx at 1. og 3./4. række skal være ortogonale fås, at $x_1 = \alpha$ medfører:
$y_1 = -1 - \alpha = \underline{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ og $y_2 = \alpha = \underline{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.