Opgave 1

a) Den Laplace transformerede af foldningsintegralet

$$f(t) = \int_0^t \tau \, \sin(t-\tau) d\tau = t * \sin t$$

er

$$F(s) = \mathcal{L}\{t\}\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2}\,\frac{1}{s^2+1} = \underline{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}}$$

og dermed

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \underline{t - \sin t}$$

og idet $\sin(\pi/2 - \tau) = \cos\tau$ fås for $t = \pi/2$

$$f(\pi/2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau \cos\tau d\tau = \frac{\pi}{2} - 1 = \underline{0.57080}$$

b) Funktionen $g(\tau) = \tau\cos\tau$ med intervalopdelingen $h = 0.1\pi$, mellem $a = 0$ og $b = \pi/2$, er beskrevet ved følgende tabel $[g_j = g(\tau_j)]$:

j	τ_j	g_j
0	0	0
1	0.1π	0.29878
2	0.2π	0.50832
3	0.3π	0.55397
4	0.4π	0.38832
5	0.5π	0

Benyttes trapez-metoden fås:

$$\tilde{f}(\pi/2) = h\Big[\tfrac{1}{2}g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + \tfrac{1}{2}g_5\Big] = 0.1\pi \cdot 1.74939 = \underline{0.54959}$$

Idet $g'(t) = \cos\tau - \tau\sin\tau$, og dermed $g'(0) = 1$ og $g'(\pi/2) = -\pi/2$, fås

$$\epsilon = -\frac{h^2}{12}\Big[g'(b) - g'(a)\Big] = -\frac{(0.1\pi)^2}{12}\Big(-\frac{\pi}{2} - 1\Big) = \underline{0.02114}$$

Den relative forskel mellem den tilnærmede værdi af integralet

$$f(\pi/2) \simeq \tilde{f}(\pi/2) + \epsilon = \underline{0.57073}$$

og den korrekte værdi er af størrelsesordenen 10^{-4}.

Opgave 2

a) Der er 10 forskellige mulige udfald med lige stor sandsynlighed, dvs.:

$$f(x) = \underline{\frac{1}{10}} \qquad \text{for } x = 0,\, 1,\, 2, \cdots,\, 9$$

og 0 for alle andre x. Middelværdien svarende til denne frekvensfunktion er

$$\mu_x = \langle X \rangle = \sum_{x=0}^{9} x f(x) = \underline{4.5}$$

og idet $\sum_{x=0}^{9} x^2 = 285$ fås

$$\sigma_x^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \frac{285}{10} - 4.5^2 = 8.25 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = \underline{2.872}$$

Tælles antal udfald, hvor $y(n) = 0$, $y(n) = 1, \cdots, y(n) = n$ og divideres med antallet af mulige udfald 10^n fås:

$$\begin{aligned} P(Y(1) \le 1) &= (1+1)\cdot 10^{-1} = \underline{0.2} \\ P(Y(2) \le 2) &= (1+2+3)\cdot 10^{-2} = \underline{0.06} \\ P(Y(3) \le 3) &= (1+3+6+10)\cdot 10^{-3} = \underline{0.02} \end{aligned}$$

b) X_i er statistisk uafhængige, og ifølge teorem 1 og 3 i afsnit 23.8 (Kreyszig, 7. ed.) gælder derfor generelt

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_x = n\mu_x = \underline{4.5\,n} \quad ; \quad \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_x^2 = n\sigma_x^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_n = \underline{2.872\sqrt{n}}$$

Når $n \gg 1$ kan vi benytte "The central limit theorem" i afsnit 24.6, og dermed at fordelingen er normal med middelværdi μ_n og standardafvigelse σ_n eller

$$f_n(y) = \underline{\frac{1}{\sqrt{16.5n\pi}} \exp\left[-\frac{(y-4.5n)^2}{16.5n}\right]}$$

At finde 95% konfidensintervallet svarer til at bestemme k således, at

$$P(\mu_n - k \le Y(n) \le \mu_n + k) = P\Big(-\tfrac{k}{\sigma_n} \le \tfrac{Y(n)-\mu_n}{\sigma_n} \le \tfrac{k}{\sigma_n}\Big) = 2\Phi\Big(\tfrac{k}{\sigma_n}\Big) - 1 = 0.95$$

og dermed, ifølge tabel A7–A8, at $k = 1.96\sigma_n$.

Når $n = 1000$ er $\mu_n = 4500$ og $k = 1.96\sqrt{8250} = 178$, og dermed bliver konfidensintervallet

$$\underline{\mathrm{CONF}\{4322 \le y(1000) \le 4678\}}$$

Opgave 3

a) De kovariante basisvektorer er givet ved (19.50) eller (19.53) $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \underline{a \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}} \quad ; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \underline{a \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Heraf bestemmes den metriske tensors kovariante komponenter

$$\{g_{ij}\} = \{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j\} = \underline{\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\theta \end{pmatrix}}$$

Basisvektorerne skal opfylde ortonormeringsbetingelsen $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$ og det ses uden videre at udtrykkene for $\mathbf{e}^1$ og $\mathbf{e}^2$ medfører at $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ og $\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$. Desuden gælder generelt at $g = |g_{ij}| = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^2$ og dermed at $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$ og $\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$. Det vil sige at alle fire relationer er opfyldt. De kontravariante basisvektorer er

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_1}{a^2} = \underline{\frac{1}{a} \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}} \quad ; \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_2}{a^2\sin^2\theta} = \underline{\frac{1}{a\sin\theta} \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}}$$

b) De afledede af de kovariante basisvektorer er $\dfrac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial u^1} = -a \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$;

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial u^1} = -a \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi \\ -\cos\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial u^2} = -a \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Christoffel symbolerne af 2. art er defineret $\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\} = \mathbf{e}^k \dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u^j}$ og

$$\left\{ {1 \atop 22} \right\} = \underline{-\sin\theta\cos\theta} \quad ; \quad \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \underline{\cot\theta}$$

mens de resterende fem komponenter er $\underline{0}$.

En direkte udregning viser at

$$R_{11} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left\{ {2 \atop 12} \right\} - 0 + \left\{ {2 \atop 21} \right\}\left\{ {2 \atop 21} \right\} - 0 = \frac{\partial \cot\theta}{\partial \theta} + \cot^2\theta = -1$$

og idet $g^{11} = 1/g_{11}$ og $g^{22} = 1/g_{22}$ fås

$$R = g^{ij}R_{ij} = \frac{1}{a^2}R_{11} + \frac{1}{a^2\sin^2\theta}R_{22} = \underline{-\frac{2}{a^2}}$$

Opgave 4

a) Ordenen af en r-cyklus er r og dermed fås

Orden 1: $\underline{e}$ Orden 2: $\underline{m,\ c,\ d,\ f,\ C,\ D,\ F}$ Orden 3: $\underline{a,\ b}$ Orden 6: $\underline{A,\ B}$.

Det sidste resultat følger af at f.eks. $A \to (45)(123)$ afbildes i et produkt af en transposition og en tricyklus med det fælles mindste multiplum 6.

De inverse elementer til 1. og 2. ordens elementerne $\{e,\ m,\ c,\ d,\ f,\ C,\ D,\ F\}$ er elementet selv, mens $a^{-1} = \underline{b}$, $b^{-1} = \underline{a}$, $A^{-1} = \underline{B}$ og $B^{-1} = \underline{A}$.

m kommuterer pr. definition med alle elementer $g_3 \in D_3$. Dette følger også af at m's billedelement (45) ikke har noget ciffer fælles med cyklerne i S_3. Da $mg_3 = g_3m$ betyder dette at m også kommuterer med alle de resterende elementer mD_3 i G idet $m(mg_3) = m(g_3m) = (mg_3)m$.

Benyttes dette resultat samt udnyttes opstillingen af D_3's (eller S_3's) konjugationsklasser givet i eksempel (4.5) på side 10 i noterne, fås at

$$K_e = \underline{\{e\}} \quad ; \quad K_a = \underline{\{a,\ b\}} \quad ; \quad K_c = \underline{\{c,\ d,\ f\}}$$
$$K_m = \underline{\{m\}} \quad ; \quad K_A = \underline{\{A,\ B\}} \quad ; \quad K_C = \underline{\{C,\ D,\ F\}}$$

b) Antallet af ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer = antallet af konjugationsklasser = $\underline{6}$.

Repræsentationernes grader n_1-n_6 bestemmes af $n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2+n_5^2+n_6^2 = r = 12$, som har løsningen $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = \underline{1}$ og $n_5 = n_6 = \underline{2}$.

Der er fire éndimensionale irreducible repræsentationer og denne del af karaktertavlen er:

	K_e	$2K_a$	$3K_c$	K_m	$2K_A$	$3K_C$
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1	-1
A_3	1	1	-1	1	1	-1
A_4	1	1	-1	-1	-1	1

Kommentarer til karaktertavlen:
1) $\chi(e) = n_i = 1$.
2) Alle konjugationsklasser indeholder både et element og dets inverse $\Rightarrow$ alle karakterer er reelle, og i de éndimensionale tilfælde er $\chi = \pm 1$.
3) Elementerne i K_a er af 3. orden og dermed er eneste mulighed $\chi(K_a) = +1$.
4) Ortogonalitet af rækkerne fastlægger nu et entydigt sæt for valg af fortegn.

Produktet af de to undergrupper $\{e,\ a,\ b\}$ og $\{e,\ c\}$ frembringer gruppen D_3 idet $\{e,\ a,\ b\}\{e,\ c\} = \{e,\ a,\ b,\ c,\ ac,\ bc\} = D_3$, da $ac = d$ og $bc = f$ [idet $(123)(23) = (13)$ og $(132)(23) = (12)$]. Undergruppen $\{e,\ a,\ b\}$ er invariant men det er $\{e,\ c\}$ ikke, idet den kun indeholder en del af konjugationsklassen K_c. Dermed opfylder de to undergrupper ikke alle de krav (8.2) de skal for at D_3 er isomorf med det direkte produkt af de to grupper.