Opgave 1

a) Benyttes (4a) side 939 fås:

$$\begin{aligned} p_3(x) = {} & 2\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 1\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\ & + (-2)\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 3\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \\ = {} & -\frac{1}{3}\left(x^3-6x^2+11x-6\right) + \frac{1}{2}\left(x^3-5x^2+6x\right) \\ & + \left(x^3-4x^2+3x\right) + \frac{1}{2}\left(x^3-3x^2+2x\right) \end{aligned}$$

eller

$$\underline{p_3(x) = \frac{5}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{10}{3}x + 2}$$

b) Newtons iterationsmetode er beskrevet i tabel 18.1 på side 930:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p_3(x_n)}{p_3'(x_n)}, \qquad p_3'(x) = 5x^2 - 12x + \frac{10}{3}$$

fås

n	x_n	$p_3(x_n)$	$p_3'(x_n)$
0	1	1	−3.666667
1	1.272727	−0.040571	−3.840220
2	1.262163	0.000039	−3.847346
3	1.262173	0.000000	

og dermed $\underline{x_p = 1.26217}$

c) Vurdering af fejlen ved at tilnærme $f(x)$ med $p_3(x)$ er givet ved (5) på side 939:

$$|\epsilon| = |\epsilon_3(x_p)| = \frac{1}{4!}\left|(x_p-0)(x_p-1)(x_p-2)(x_p-3)f^{(4)}(t \approx x_p)\right| = \underline{0.0177}$$

Vi har, at

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \simeq f'(x) \simeq p_3'(x)$$

og dermed at fejlen $|\epsilon|$ svarer til en variation af x, som er

$$|\Delta x| \simeq \left|\frac{\epsilon}{p_3(x_p)}\right| = \frac{0.0177}{3.85} = 0.0046$$

Dvs. at løsningen af $f(x) = 0$, når $1 < x < 2$, må forventes at ligge i intervallet $x_p - |\Delta x| < x < x_p + |\Delta x|$, eller

$$\underline{1.257 < x < 1.267}$$

Opgave 2

a) Benyttes Heaviside funktionen, $u(t-a)$, kan $v(t)$ skrives:

$$\begin{aligned} v(t) &= V_0 \frac{t}{a}[1-u(t-a)] + V_0 u(t-a) \\ &= \frac{V_0}{a}\Big[t-(t-a)u(t-a)\Big] \end{aligned}$$

og benyttes t-forskydningsreglen, (4) på side 279, fås

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\} = \underline{\frac{V_0}{as^2}\Big(1-e^{-as}\Big)}$$

b) Laplace transformationen af differentialligningen er:

$$V = RI + L[sI - i(0)] = RI + LsI$$

og dermed

$$\begin{aligned} I = I(s) &= \frac{V}{Ls+R} = \frac{V_0}{aL}\frac{1}{s^2(s+\frac{R}{L})}\Big(1-e^{-as}\Big) \\ &= \frac{V_0}{aR}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{\frac{L}{R}}{s+\frac{R}{L}} - \frac{\frac{L}{R}}{s}\right)\Big(1-e^{-as}\Big) \end{aligned}$$

som ved invertering giver resultatet:

$$i(t) = \underline{\frac{V_0}{aR}\left(t - \frac{L}{R}\Big(1-e^{-\frac{R}{L}t}\Big) - u(t-a)\Big[t-a-\frac{L}{R}\Big(1-e^{-\frac{R}{L}(t-a)}\Big)\Big]\right)}$$

c) For $0 < t \ll a$ er $u(t-a) = 0$ og $e^{-\frac{R}{L}t} \simeq 1 - \frac{R}{L}t + \frac{R}{2L}t^2$, som indsat giver

$$i(t) \simeq \frac{V_0}{aR}\left[t - \frac{L}{R}\left(\frac{R}{L}t - \frac{R}{2L}t^2\right)\right] = \underline{\frac{V_0}{2aL}t^2}$$

For $t \to \infty$ er $u(t-a) = 1$ og $e^{-\frac{R}{L}t} \to 0$, og dermed

$$i(t) \to \frac{V_0}{aR}\left(t - \frac{L}{R} - \left[t-a-\frac{L}{R}\right]\right) = \underline{\frac{V_0}{R}}$$

Opgave 3

a) De kovariante basisvektorer er givet ved, (19.50) eller (19.53): $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$, dvs.

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \underline{(-2\sin\theta, \cos\theta, 0)} \quad , \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \underline{(0,0,1)}$$

Heraf bestemmes den metriske tensors kovariante komponenter

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \underline{\begin{pmatrix} 4\sin^2\theta + \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) Ifølge (19.63) er $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$ (g^{ij}-matricen er den inverse til g_{ij}-matricen):

$$g^{ij} = \underline{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{4\sin^2\theta + \cos^2\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

De kontravariante komponenter g^{ij} kan benyttes til at bestemme de kontravariante basisvektorer, $\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j$ (nederst side 707):

$$\mathbf{e}^1 = g^{11}\mathbf{e}_1 = \underline{\frac{(-2\sin\theta, \cos\theta, 0)}{4\sin^2\theta + \cos^2\theta}} \quad , \quad \mathbf{e}^2 = g^{22}\mathbf{e}_2 = \underline{(0,0,1)}$$

Christoffel symbolet af anden art er defineret, (19.74), $\Gamma^k_{ij} = \mathbf{e}^k \cdot \dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u^j}$:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{(-2\sin\theta, \cos\theta, 0)}{4\sin^2\theta + \cos^2\theta} \cdot (-2\cos\theta, -\sin\theta, 0) = \underline{\frac{3\sin\theta\cos\theta}{4\sin^2\theta + \cos^2\theta}}$$

og alle de andre 7 komponenter er 0.

c) $\mathbf{r}$'s kontravariante komponenter er:

$$r^1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}^1 = \frac{-3\sin\theta\cos\theta}{4\sin^2\theta + \cos^2\theta} \quad , \quad r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}^2 = z$$

og dermed

$$\frac{\partial r^1}{\partial \theta} = \frac{12\sin^4\theta - 3\cos^4\theta + 9\sin^2\theta\cos^2\theta}{(4\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2} \quad , \quad \frac{\partial r^2}{\partial z} = 1$$

Indsættes fås

$$r^i_{;i} = \frac{\partial r^1}{\partial \theta} + \frac{\partial r^2}{\partial z} + \Gamma^1_{11} r^1 = \underline{1 + \frac{12\sin^4\theta - 3\cos^4\theta}{(4\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2}}$$

Opgave 4

a) G's Cayley-tavle (indgangssøjlen er venstre faktor i produkterne):

	E	I	A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2
E	E	I	A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2
I	I	E	A_2	A_1	B_2	B_1	C_2	C_1
A_1	A_1	A_2	I	E	C_2	C_1	B_1	B_2
A_2	A_2	A_1	E	I	C_1	C_2	B_2	B_1
B_1	B_1	B_2	C_1	C_2	E	I	A_1	A_2
B_2	B_2	B_1	C_2	C_1	I	E	A_2	A_1
C_1	C_1	C_2	B_2	B_1	A_2	A_1	E	I
C_2	C_2	C_1	B_1	B_2	A_1	A_2	I	E

b) Af tavlen fremgår det at elementerne $\{I,\, B_1,\, B_2,\, C_1,\, C_2\}$ har ordenen 2 og $\{A_1,\, A_2\}$ har ordenen 4.

Der er 3 undergrupper af 4. orden:

$$\begin{aligned} H_A &= \{E,\, A_1,\, I,\, A_2\} \equiv \mathcal{C}_4 \\ H_B &= \{E,\, I,\, B_1,\, B_2\} \equiv \mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{C}_2 \\ H_C &= \{E,\, I,\, C_1,\, C_2\} \equiv \mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{C}_2 \end{aligned}$$

c) A_1 og A_2 tilhører samme konjugationsklasse, da fx $B_1^{-1} A_1 B_1 = B_1 A_1 B_1 = A_2$, og da de er de eneste elementer af 4. orden er der ikke andre elementer i denne klasse, sætning (4.4).

Alle elementerne af 2. orden er beskrevet ved unitære matricer, idet der for disse elementer gælder at $U = U^{-1}$ og at $U = U^{\dagger}$, og dermed at $U^{-1} = U^{\dagger}$. For de to 4. ordens elementer gælder, at $A_1^{-1} = A_2 = A_1^{\dagger}$, og tilsvarende for A_2.

Repræsentationen er irreducibel: Indføres en generel matrix $T = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix}$ som antages at kommuterer med alle matricerne i repræsentationen har vi: $TC_1 = C_1 T \;\Rightarrow\; t_2 = -t_2,\, t_3 = -t_3$ og dermed at $t_2 = t_3 = 0$, hvorefter $TA_1 = A_1 T \;\Rightarrow\; t_1 = t_4$. Dermed er den eneste matrix T der kommuterer med alle repræsentationens matricer lig med en konstant gange enhedsmatricen, hvilket er en tilstrækkelig betingelse [sætning (10.6) – (10.8)] for at repræsentationen er irreducibel.

Karakteren af de forskellige elementer er givet ved sporet af matricerne, dvs.

$$\begin{aligned} &\chi(E) = 2 \quad , \qquad \chi(I) = -2 \quad \text{og} \\ &\chi(A_1) = \chi(A_2) = \chi(B_1) = \chi(B_2) = \chi(C_1) = \chi(C_2) = 0 \end{aligned}$$