Moivre's sætning

Sandsynlighedstætheden for binomialfordelingen:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad (x = 0, 1, \cdots, n) \tag{1}$$

$(q = 1 - p)$ kan betragtes i to grænser:

(I)

For $n \to \infty$ og $p \to 0$, således at $\lambda = np$ holdes konstant går binomialfordelingen mod Poisson-fordelingen: Indføres λ kan $f(x)$ skrives

$$f(x) = \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x} \frac{\lambda^x}{x!} \Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^n \Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^{-x} \tag{2}$$

hvor

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x} = 1\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{x-1}{n}\Big) \to 1 \tag{3}$$

for $n \to \infty$ og

$$\begin{aligned} \Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^n &= 1 - \frac{n}{1!}\frac{\lambda}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{\lambda^2}{n^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\lambda^3}{n^3} + \cdots \\ &= 1 - \lambda + \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\frac{\lambda^2}{2!} - \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\frac{\lambda^3}{3!} + \cdots \\ &\to 1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} - \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots = e^{-\lambda} \end{aligned} \tag{4}$$

Sidste faktor i (2) går mod 1, dvs.

$$f(x) \to \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad \text{for } n \to \infty \tag{5}$$

som er Poisson-sandsynlighedstætheden med middelværdi $\mu = \lambda$.

(II)

Ud fra binomial-fordelingen kan vi nå frem til en kontinuert fordeling ved at fastholde p under grænseovergangen $n \to \infty$. Herved går middelværdien $\mu = np$ og spredningen $\sigma = \sqrt{npq}$ begge mod ∞. Dette nødvendiggør en normering af den oprindelige stokastiske variabel X, som erstattes med

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{6}$$

I grænsen $n \to \infty$ bliver Z en kontinuert stokastisk variabel og $F(x = \sigma z + \mu)$ går over i standard normalfordelingen, med middelværdien 0 og spredningen 1, dvs. $F(\sigma z + \mu) \to \Phi(z)$ (De Moivre og Laplace's grænseværdisætning), svarende til ligning (11) på side 1189 i bogen (hvis ± 0.5 i α og β negligeres).

I beviset udnyttes det, at det kun er opførslen af $f(x)$ i en tæt omegn af $x = \mu$, der er afgørende, $f(x) \approx 0$ hvis $|x - \mu| > r\sigma$, hvor r er af størrelsesordenen 5. Det betyder at omegnen relativt set, $r\sqrt{npq}/np \to 0$ for $n \to \infty$, og dermed at vi dels kan benytte Stirlings formel for alle faktorerne i binomialkoefficienten, n over x, og dels at vi kan udnytte en rækkeudvikling mht. Δ/μ, hvor $\Delta = x - \mu$:

Anvendes Stirlings formel (ligning (7) side 1163) i (1) fås:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} \sqrt{2\pi(n-x)}(n-x)^{n-x} e^{-n+x}} p^x q^{n-x} \\ &= \sqrt{\frac{n}{2\pi x(n-x)}} \left(\frac{np}{x}\right)^x \left(\frac{nq}{n-x}\right)^{n-x} \end{aligned} \tag{7}$$

Rækkeudvikles kvardratroden til 0te orden i Δ erstattes den af $1/\sqrt{2\pi npq}$. For det næste led fås:

$$\left(\frac{np}{x}\right)^x = \exp\left[x \ln\left(\frac{\mu}{x}\right)\right] = \exp\left[(\mu + \Delta)\ln\left(\frac{\mu}{\mu + \Delta}\right)\right]$$

hvor

$$\ln\left(\frac{\mu}{\mu + \Delta}\right) = -\ln\left(1 + \frac{\Delta}{\mu}\right) \approx -\frac{\Delta}{\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^2$$

og dermed

$$\left(\frac{np}{x}\right)^x \approx \exp\left[-\Delta - \frac{\Delta^2}{2\mu}\right] = \exp\left[np - x - \frac{(x - np)^2}{2np}\right] \tag{8}$$

og helt analogt

$$\left(\frac{nq}{n-x}\right)^{n-x} \approx \exp\left[nq - (n-x) - \frac{(n - x - nq)^2}{2nq}\right] = \exp\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2nq}\right] \tag{9}$$

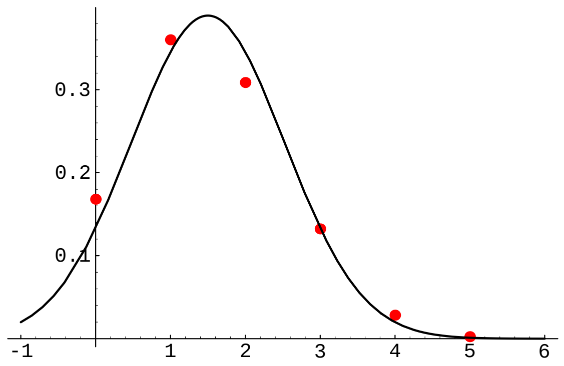
Ganger vi de to faktorer sammen fås

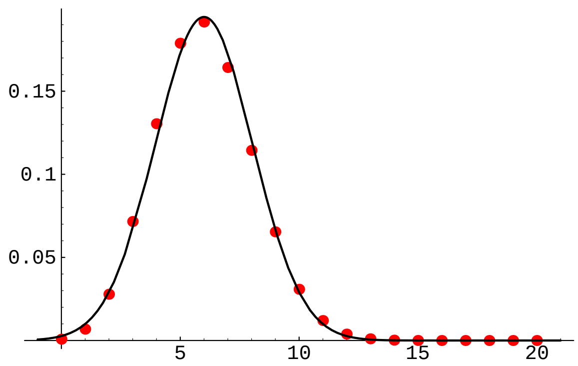
$$\left(\frac{np}{x}\right)^x \left(\frac{nq}{n-x}\right)^{n-x} \approx \exp\left[-\Delta - \frac{\Delta^2}{2np} + \Delta - \frac{\Delta^2}{2n(1-p)}\right] = \exp\left[-\frac{\Delta^2}{2np(1-p)}\right]$$

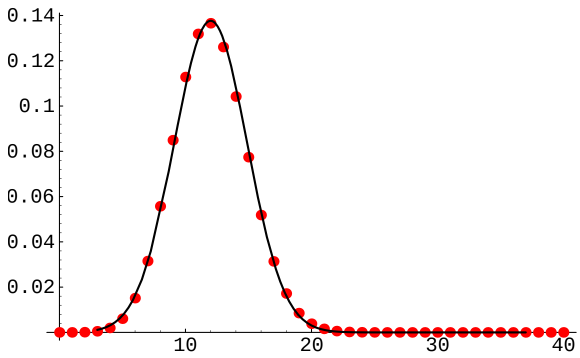
og når $npq = np(1-p)$ erstattes med σ^2 fås slutresultatet

$$f(x) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{10}$$

som er gyldigt i grænsen $\mu = np \gg 1$. Det kan tilføjes, at benyttes samme fremgangsmåde kan det vises at sandsynlighedstætheden for Poisson fordelingen for store værdier af μ kan tilnærmes med den normale fordeling (10) med $\sigma = \sqrt{\mu}$. Bemærk, at bogens tabel A6 over Poisson-fordelingen kun medtager værdier af $\mu \leq 5$. For større værdier af μ kan man benytte $\Phi(z)$.







Figuren viser sandsynlighedstætheden for en binomialfordeling med $p = 0.3$ og $n = 5$, 20 og 40 (punkterne) og den tilsvarende normal fordelingstæthed (de kontinuerte kurver).