

Matematik G – Fysisk Matematik

Skriftlig eksamen - Sommer 99

4-timers skriftlig prøve.

Alle rimelige hjælpemidler er tilladt, såsom bøger, noter og lommeregner.

Opgave 1

Der er givet følgende 1. ordens differentiaalligning med begyndelsesbetingelse:

$$y' = f(x, y) = x - y \quad ; \quad y(0) = 1 \quad (1)$$

- a) Bestem Laplace-transformen af $y(x)$: $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}$. Find $y(x)$ og udregn $y(1)$.
- b) Anvend Runge-Kutta algoritmen (af 4. orden) til en numerisk beregning af $y(1)$ ud fra ligning (1). Benyt intervalopdelingen $h = 1$ (kun ét interval).
- c) Skitsér funktionen $y(x)$, fundet under spørgsmål a), for $0 \leq x < \infty$. Herunder hører en bestemmelse af funktionens extrema og asymptote.

Opgave 2

Antallet af radioaktive henfald i tidsintervallet t antages givet ved Poisson-fordelingen med middelværdien $\mu = \lambda t$, hvor henfaldskonstanten λ er uafhængig af tiden.

- a) Hvad er sandsynligheden for 3 eller flere henfald i tidsintervallet $t = 2/\lambda$?
- b) En tælling af henfald i et vist tidsinterval giver resultatet X . Bestem μ , således at $P(\mu - \Delta\mu \leq X \leq \mu + \Delta\mu) = 95\%$, når $\Delta\mu/\mu = 0.05$. Her er $\mu \gg 1$ og Poisson-fordelingen må tilnærmes med den tilsvarende kontinuerte fordelingsfunktion.

Hvis $p(t)$ er sandsynligheden for 0 henfald i tidsintervallet t vil $F(t) = P(T \leq t) = 1 - p(t)$ være fordelingsfunktionen for længderne af tidsintervallet mellem et henfald og det næste. T betegner den stokastiske variabel svarende til t , og $t \geq 0$ pr. definition (eller $F(t) = 0$ for $t \leq 0$).

- c) Find $F(t)$ og den tilhørende frekvensfunktion $f(t)$, udtrykt ved λ og $t \geq 0$. Bestem den moment-genererende funktion $G(u) = \langle \exp(uT) \rangle$ for $u < \lambda$. Beregn middelværdien $\langle T \rangle$ og variansen $\sigma^2 = \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2$ for denne fordeling.

(opgavesættet fortsætter)

Opgave 3

De parabolske cylinderkoordinater betegnes: $\alpha = u^1$, $\beta = u^2$ og $\gamma = u^3$. Stedvektoren $\mathbf{r} = (x, y, z) = \mathbf{r}(\alpha, \beta, \gamma)$ i et kartesiansk koordinatsystem bestemmes ved

$$x = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2)$$

$$y = \alpha\beta$$

$$z = -\gamma$$

- a) Bestem de kovariante basisvektorer $\mathbf{e}_i$ i det parabolske koordinatsystem. Opstil den metriske tensors kovariante, g_{ij} , og kontravariante komponenter, g^{ij} , som (3×3) matricer. Find $\sqrt{g}$, hvor g er determinanten af $\{g_{ij}\}$ -matricen.

Vektoren $\mathbf{v}$ defineres som gradienten af funktionen $f(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2$, dvs.

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}^i = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial u^i} \mathbf{e}^i$$

- b) Bestem $\mathbf{v}$'s kovariante, v_i , og kontravariante, v^i , komponenter. Find $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_i v^i$ og $\nabla \cdot \mathbf{v}$ (divergensen af $\mathbf{v}$). Udregn de samme to størrelser i det kartesianske koordinatsystem. Sammenlign og kommentér resultaterne af de to regninger.

Opgave 4

Gruppen G har ordenen 10: $G = \{e, a, a^2, a^3, a^4, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$,

og der gælder følgende kompositionsregler:

$$\begin{aligned} a^i a^j &= a^{i+j} & a^i b_j &= b_{2i+j} \\ b_i a^j &= b_{i+3j} & b_i b_j &= a^{-2i+2j} \end{aligned}$$

dvs. de sædvanlige potensregneregler for a , hvor $a^5 = e$ (det neutrale element). Desuden benyttes $b_{i+5p} = b_i$, hvor p er et helt tal.

- a) Bestem de forskellige elementers orden.

Udregn de 4 konjugationer:

$$a^{-p} a^q a^p \qquad b_p^{-1} a^q b_p \qquad a^{-p} b_q a^p \qquad b_p^{-1} b_q b_p$$

Bestem gruppen G 's konjugationsklasser.

- b) Angiv antallet af irreducible repræsentationer af G , og bestem disse repræsentationers grader. Opstil gruppens karaktertavle (giv argumenterne for de vigtigste trin i opstillingen af tavlen).

(opgavesættet er slut)