Matematik G – Fysisk Matematik

Skriftlig eksamen - Sommer 98

4-timers skriftlig prøve.

Alle *rimelige* hjælpemidler er tilladt, såsom bøger, noter og lommeregner.

Opgavesættet består af 5 opgaver, hvoraf kun 4 skal besvares.

Alle skal besvare opgaverne 1, 2, og 3 (side 1 og 2). Der er valgfrihed mellem opgave 4 og opgave 5 (på side 3). Opgave 4 er en opgave inden for den nye del af Matematik G's eksamenspensum. Opgave 5 er en opgave inden for den del af det tidligere pensum, der ikke længere er inkluderet i kurset.

Der advares kraftigt imod, at man forsøger at regne både opgave 4 og 5. Kun den ene af de to opgave vil blive taget med i bedømmelsen, og, med mindre andet er angivet, vil det være besvarelsen af opgave 4, der tæller.

Opgave 1

Fresnel-integralet $C(x)$ er defineret

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$$

a) Beregn en tilnærmet værdi $\tilde{C}(1)$ for værdien af integralet for $x = 1$. Benyt både trapez-metoden og Simpsons algoritme. I begge tilfælde anvendes en intervallængde $h = \Delta t = 0.1$, og der regnes med 5 decimalers nøjagtighed.

b) Fejlen $\epsilon = J - \tilde{J}$ ved udregning af et integral $J = \int_a^b f(t)dt$ er

$$\epsilon = -\frac{h^2}{12}\Big[f'(b) - f'(a)\Big] \qquad \text{(trapez-metoden)}$$

$$\epsilon = -\frac{h^4}{180}\Big[f'''(b) - f'''(a)\Big] \qquad \text{(Simpsons algoritme)}$$

i grænsen $h \to 0$. Benyt disse udtryk til at bestemme fejlen ved hver af de to udregninger af $\tilde{C}(1)$. Giv en vurdering af nøjagtigheden af at benytte $C(1) \simeq \tilde{C}(1) + \epsilon$ ved at sammenligne resultaterne, som de to metoder giver for $C(1)$.

Opgave 2

Bessel-funktionen af 0te orden $J_0(t)$ er løsning til differentialligningen:

$$ty'' + y' + ty = 0$$

med randbetingelsen $y(0) = J_0(0) = 1$.

a) En Laplace-transformation af denne anden ordens differentialligning fører til en første ordens differentialligning i s til bestemmelse af $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Opstil denne ligning og find dens generelle løsning $Y(s)$.

b) Vis, at hvis $f(t)$ er vilkårligt ofte differentiabel for $t \geq 0$ og $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, så er

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0)$$

ved at benytte en Taylor-rækkeudvikling af $f(t)$ i Laplace-integralet. Anvend dette resultat til at fastlægge integrationskonstanten i den generelle løsning $Y(s)$ under punkt a), således at $Y(s) = \mathcal{L}\{J_0(t)\}$.

Opgave 3

Addition (og/eller subtraktion) af n tal afrundet til r decimaler giver en stokastisk ophobning (Y) af afrundingsfejl:

$$Y(n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

hvor X_i er statistisk uafhængige variable.

a) De stokastiske variable X_i har alle den kontinuerte frekvensfunktion

$$f(x) = \begin{cases} c & -0.5\,a < x \leq 0.5\,a \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{1}$$

hvor $a = 10^{-r}$. Bestem konstanten c og beregn fordelingens varians σ_1^2. Fordelingen kan tilnærmelsesvis erstattes med en diskret fordeling:

$$f_1(-b) = f_1(b) = \tfrac{1}{2} \tag{2}$$

Bestem $b > 0$, således at fordelingerne (1) og (2) har samme varians. Vis, at hvis X_i antages at have den diskrete fordeling (2), så er frekvensfunktionen for $Y(n)$:

$$f_n(y_i) = \binom{n}{i}\frac{1}{2^n} \quad , \quad \text{hvor } y_i = (2i - n)b \text{ og } i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

b) For $n \geq n_0 \gg 1$ vil usikkerheden på resultatet af additionen af de n tal være så stor, at resultatet bør angives med $r - 1$ snarere end med r decimaler. Udnyt "the central limit theorem" til at bestemme n_0 fastlagt ved følgende kriterium: For $n \geq n_0$ skal der være mere end 50% sandsynlighed for, at den numeriske afrundingsfejl er større end $5a$, dvs.

$$P\{-5a < Y(n = n_0) \leq 5a\} = \tfrac{1}{2}$$

Find n_0.

Opgave 4 (valgfri opgave, nyt pensum)

Quaternion-gruppen har ordenen 8:

$$Q = \{q_1,\, q_2, \ldots,\, q_8\} = \{1,\, -1,\, i,\, -i,\, j,\, -j,\, k,\, -k\}$$

og kompositionsreglen er multiplikation, hvor specielt

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

samt

$$\begin{array}{ccccc} ij = k & ; & ki = j & ; & jk = i \\ ji = -k & ; & ik = -j & ; & kj = -i \end{array}$$

a) Angiv de inverse elementer ved fx at opstille $Q^{-1} = \{q_1^{-1},\, q_2^{-1}, \ldots,\, q_8^{-1}\}$. Hvad er ordenen af de forskellige elementer? Bestem Q's konjugationsklasser.

b) Find alle Q's egentlige undergrupper. Hvilke af disse undergrupper er invariante? Angiv antallet af ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer af Q, og bestem disse repræsentationers grader. Opstil Q's karaktertavle (anfør argumenterne for de vigtigste trin i opstillingen af tavlen).

Opgave 5 (valgfri opgave, gammelt pensum)

a) Funktionen $g(x) = x$ i intervallet $-1 \leq x \leq 1$ gentager sig med en periode af længden 2: $g(x + 2p) = g(x)$, hvor $p = \pm 1,\, \pm 2, \ldots$

Opstil Fourier-rækken for denne funktion.

b) Varmeledningsligningen $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

for en stang med længden $L = 1$ skal løses med følgende randbetingelser: Stangens endepunkter har fastholdte, men forskellige temperaturer,

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{og} \qquad u(1,t) = 1$$

og temperaturfordelingen til tiden $t = 0$ er

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Hjælp: Benyt en transformation $u(x,t) \mapsto \tilde{u}(x,t)$, som opfylder varmeledningsligningen, men hvor randbetingelserne for $\tilde{u}(x,t)$ er ændret således at $\tilde{u}(0,t) = \tilde{u}(1,t) = 0$. Opskriv Fourier-rækken for $\tilde{u}(x,t)$ og find derfra den ønskede løsning $u(x,t)$. Skitsér temperaturfordelingen $u(x,t)$ til tidspunktet $t = t_0 = (\pi c)^{-2}$.

(opgavesættet er slut)