

Matematik F2/G – Fysisk Matematik

Skriftlig eksamen - Sommer 2000

4-timers skriftlig prøve.

Alle rimelige hjælpemidler er tilladt, såsom bøger, noter og lommeregner.

Opgave 1

Funktionen $f(t)$ er givet ved integralet

$$f(t) = \int_0^t \tau \sin(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

- a) Bestem den Laplace transformerede $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ og udregn $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. Angiv værdien af $f(\pi/2)$ med fem decimaler.
- b) Benyt trapez-metoden til at udregne en tilnærmet værdi $\tilde{f}(t)$ af integralet givet ved (1) når $t = \pi/2$. Anvend en ækvidistant intervalopdeling med $h = 0.1\pi$ og udregn resultatet med fem decimalers nøjagtighed.

Bestem fejlen $\epsilon = f(\pi/2) - \tilde{f}(\pi/2)$ ved at benytte $\epsilon = -\frac{h^2}{12}[g'(b) - g'(a)]$,

hvor $g(\tau)$ er funktionen der integreres vha. trapez-metoden, og a og b er nedre og øvre grænse af integralet. Sammenlign resultatet $\tilde{f}(\pi/2) + \epsilon$ med den korrekte værdi af $f(\pi/2)$.

Opgave 2

Den stokastiske variabel $Y(n)$ er summen af n éncifrede tal

$$Y(n) = \sum_{i=1}^n X_i$$

X_i er statistisk uafhængige og hver enkelt variabel antager en af værdierne 0, 1, 2, $\dots$, eller 9 med lige stor sandsynlighed.

- a) Angiv frekvensfordelingen $f(x)$ for det enkelte X_i , og beregn den tilhørende middelværdi μ_x og standardafvigelse σ_x .
Bestem sandsynligheden $P(Y(n) \leq n)$, når $n = 1, 2$ og 3 .
- b) Angiv middelværdi μ_n og standardafvigelse σ_n af summen $Y(n)$ for vilkårlig heltallig værdi af $n \geq 1$. Opstil den tilnærmede frekvensfunktion $f_n(y)$ for $Y(n)$ i grænsen $n \gg 1$. Benyt denne tilnærmelse til at beregne 95% konfidensintervallet $\text{CONF}\{\mu_n - k \leq y(n) \leq \mu_n + k\}$ for $n = 1000$.

(opgavesættet fortsætter)

Opgave 3

Et todimensionalt kurvelineært koordinatsystem på en kugle med fastholdt radius a er defineret ved

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = \mathbf{r}(\theta, \phi) = (a \sin \theta \cos \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \theta) \quad (a > 0)$$

hvor første koordinaten $u^1 = \theta$ og anden koordinaten $u^2 = \phi$.

- a) Find de to kovariante basisvektorer $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ og opstil den metriske tensors kovariante komponenter g_{ij} i en (2×2) matrix. Vis generelt, at de kontravariante basisvektorer i det todimensionale tilfælde er

$$\mathbf{e}^1 = [(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2]/g \quad ; \quad \mathbf{e}^2 = [(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1]/g$$

hvor $g = |g_{ij}|$ er determinanten af g_{ij} -matricen. Bestem de kontravariante basisvektorer i kugle-koordinatsystemet.

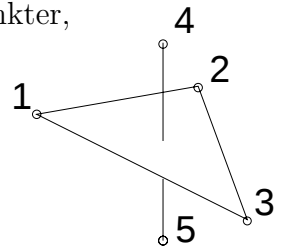
- b) Bestem de otte komponenter af Christoffel symbolet af 2. art $\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\}$.

Beregn *krvatur invarianten* $R = R_i^i = g^{ij} R_{ij}$, hvor komponenterne af *den symmetriske Ricci tensor* er $R_{22} = -\sin^2 \theta$, $R_{12} = R_{21} = 0$ og

$$R_{11} = \frac{\partial}{\partial u^1} \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ 1k \end{smallmatrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial u^k} \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ 11 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ k1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ m1 \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ 11 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ mk \end{smallmatrix} \right\}$$

Opgave 4

Diedergruppen D_3 er gruppen af transformationer, der fører en ligesidet trekant over i sig selv, og den er isomorf med den symmetriske gruppe S_3 , i.e. $D_3 = \{e, a, b, c, d, f\} \equiv \{(1), (123), (132), (23), (13), (12)\}$, hvor de tilsvarende billedelementer i S_3 er angivet ved cykler. Der indføres to punkter, nummereret 4 og 5, symmetrisk placeret over og under trekantens midtpunkt. Den tilsvarende transformationsgruppe $G = D_{3h}$ indeholder udover elementerne i D_3 også elementet m , som angiver en spejling i trekantens plan, samt alle sammensætningerne $ma = A$, $mb = B, \dots, mf = F$. Indføres betegnelserne $D_2 = \{e, m\} \equiv S_2 = \{(1), (45)\}$ så er G isomorf med det direkte produkt af D_2 og D_3 , eller $G = D_2 D_3 \equiv S_2 S_3$.



- a) Bestem ordenen af hver af de 12 elementer i G (udnyt eventuelt isomorfien mellem G og $S_2 S_3$). Bestem det inverse element til hvert enkelt element i G . Vis at m kommuterer med et vilkårligt element $g \in G$. Bestem G 's konjugationsklasser.
- b) Bestem antallet af ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer af G og find repræsentationernes grader. Opstil karaktertavlen for alle de irreducible repræsentationer af G som har dimensionen 1.

Vis at $D_3 = \{e, a, b\}\{e, c\}$. Betyder denne relation, at D_3 er isomorf med det direkte produkt af disse to undergrupper?

(opgavesættet er slut)