Matematik G – Fysisk Matematik

Skriftlig eksamen - Vinter 98/99

4-timers skriftlig prøve.

Alle *rimelige* hjælpemidler er tilladt, såsom bøger, noter og lommeregner.

Opgave 1

Funktionen $f(x)$ opfylder følgende 4 betingelser:

$$f(0) = 2, \qquad f(1) = 1, \qquad f(2) = -2, \qquad f(3) = 3,$$

og $f(x)$ tilnærmes med 3. grads polynomiet gennem de fire punkter, $f(x) \approx p_3(x)$.

a) Benyt Lagranges interpolationsmetode til at opstille udtrykket for $p_3(x)$.

b) Find løsningen x_p til ligningen $p_3(x) = 0$ i intervallet $1 < x < 2$, ved hjælp af Newtons (Newton–Raphsons) iterationsmetode. Benyt $x = 1$ som startværdi, og bestem x_p med 5 decimalers nøjagtighed.

Antag, at den numeriske værdi af den fjerde afledede er $|f^{(4)}(x)| \approx 1$ for $x = x_p$.

c) Bestem den numeriske fejl $|\epsilon| = |f(x) - p_3(x)|$ for $x = x_p$. Benyt $|\epsilon|$ til at give en vurdering af det interval omkring x_p, som indeholder en løsning til $f(x) = 0$.

Opgave 2

Den elektriske strøm $i(t)$ gennem en modstand i serie med en spole beskrives ved ligningen ($t \geq 0$):

$$v(t) = R\,i(t) + L\,\frac{di(t)}{dt} \quad , \qquad i(0) = 0$$

hvor den påtrykte spænding er:

$$v(t) = \begin{cases} V_0 \dfrac{t}{a} & , \quad 0 < t < a \\[2ex] V_0 & , \quad t > a \end{cases}$$

a) Bestem Laplace-transformen af $v(t)$: $V = V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$.

b) Find $I = I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}$ og strømmen $i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}$.

c) Bestem t-afhængigheden af $i(t)$ i området $0 < t \ll a$ og grænseværdien af $i(t)$ når $t \to \infty$.

(opgavesættet fortsætter)

Opgave 3

Parameterfremstillingen for en cylinder med et elliptisk tværsnit er:

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = \mathbf{r}(\theta, z) = (2\cos\theta, \sin\theta, z)\,, \qquad \begin{cases} 0 \le \theta < 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

og θ ($= u^1$) og z ($= u^2$) benyttes som første og anden koordinat i et kurvelineært koordinatsystem på denne flade.

a) Find de to kovariante basisvektorer $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ og opstil den metriske tensors kovariante komponenter g_{ij} i en (2×2) matrix.

b) Bestem den metriske tensors kontravariante komponenter g^{ij}, de kontravariante basisvektorer $\mathbf{e}^1$ og $\mathbf{e}^2$, og de 8 komponenter af Christoffel symbolet af anden art Γ^k_{ij}.

c) Beregn divergensen af $\mathbf{r}(\theta, z)$:

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = r^i_{\ ;i} = \frac{\partial r^i}{\partial u^i} + \Gamma^i_{ki} r^k$$

hvor r^i er de kontravariante komponenter af $\mathbf{r}$.

Opgave 4

Gruppen G har ordenen 8 og kan repræsenteres ved følgende 8 matricer:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Opstil Gs gruppetavle (Cayley-tavle).

b) Angiv de forskellige elementers orden. Bestem de 3 forskellige undergrupper af ordenen 4 og angiv hvilke af disse, der er isomorfe med enten den cykliske gruppe af 4. orden, $\mathcal{C}_4$, eller med Kleins fire-gruppe, $\mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{C}_2$.

c) Vis, at A_1 og A_2 tilhører samme konjugationsklasse og at denne klasse kun indeholder disse to elementer.

Eftervis, at de 8 matricer ovenfor er unitære og at repræsentationen er irreducibel. Angiv de forskellige elementers karakterer i denne repræsentation.

(opgavesættet er slut)