Matematik G – Fysisk Matematik
Skriftlig eksamen - Vinter 97/98

4-timers skriftlig prøve.

Alle *rimelige* hjælpemidler er tilladt, såsom bøger, noter og lommeregner.

Opgave 1

Funktionen $f(x)$ er beskrevet ved følgende tabel $[f_j = f(x_j)]$:

j	x_j	f_j
0	0	1,00000
1	0,1	1,11110
2	0,2	1,24960
3	0,3	1,42510
4	0,4	1,64960
5	0,5	1,93750
6	0,6	2,30560

og den fjerde afledede: $M_4 = f^{(4)}(x) = 24$ i intervallet $0 \leq x \leq 0,6$.

a) Benyt Simpson's algoritme (med $2m = 6$) til at beregne en tilnærmet værdi $\tilde{J}$ for integralet $J = \int_0^{0,6} f(x)dx$. Vurder fejlen $\epsilon_S = J - \tilde{J}$.

b) Udregn en tilnærmet værdi $p_{n=3}(x)$ for $f(x)$ når $x = 0,15$, ved at benytte Newton's forlæns-difference interpolationsformel til 3. orden med startværdien $x_0 = 0$. Bestem fejlen $\epsilon_3 = f(0,15) - p_3(0,15)$.

Opgave 2

Bevægelsesligningen for en dæmpet harmonisk oscillator er:

$$y'' + 2y' + 5y = 5 \qquad ; \qquad t \geq 0$$

a) Find den Laplace transformerede $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ og løsningen $y(t)$ for $t > 0$ udtrykt vha. parametrene a og b, hvor $a = y(0)$ og $b = y'(0)$.

b) Bestem begyndelsesbetingelserne, a og b, og angiv den tilhørende løsning $y(t)$ i følgende to tilfælde:

i) $y(0) = 0$ og $y(\frac{\pi}{4}) = 1$

ii) $y'(0) = 0$ og $y''(0) = 0$

(opgavesættet fortsætter)

Opgave 3

a) Find løsninger $u = u(x, y)$ til den partielle differentialligning:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ved seperation af de variable.

b) Vis at $u(x, y) = \phi(xy)$ er en løsning, når $\phi(z)$ er en vilkårlig (differentiabel) funktion af z. Bestem $u(x, y)$ for $x > 0$ og $y > 0$, således at

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = y\ln(xy) \qquad \text{og} \qquad u(1, 1) = 0.$$

Opgave 4

a) 5 målinger af en kontinuert varierende størrelse giver følgende resultater:

$$31,1 \quad 35,2 \quad 34,7 \quad 33,0 \quad 30,5$$

Bestem "the 90% confidence interval" for middelværdien μ, når måleresultaterne antages beskrevet ved den normale fordeling.

b) Bestem sandsynligheden for i et kast med to (perfekte) terninger at slå en syver (hvor summen af antal øjne på de to terninger er 7). Hvad er sandsynligheden for at slå mindst 2 syvere i 4 kast? Bestem middelværdien μ og standardafvigelsen σ af X, hvor X er antallet af syvere slået i 4 kast.

(opgavesættet er slut)