Opgave 1

a)

j	t_j	$f_j = \cos\left(\frac{\pi}{2}t_j^2\right)$
0	0	1.00000
1	0.1	0.99988
2	0.2	0.99803
3	0.3	0.99002
4	0.4	0.96858
5	0.5	0.92388
6	0.6	0.84433
7	0.7	0.71813
8	0.8	0.53583
9	0.9	0.29404
10	1.0	0

$$\begin{aligned} s_0 &= f_0 + f_{10} = 1 \\ s_1 &= f_1 + f_3 + \cdots + f_9 = 3.92595 \\ s_2 &= f_2 + f_4 + \cdots + f_8 = 3.34677 \end{aligned}$$

og dermed

$$\begin{aligned} \tilde{C}(1) &= \frac{h}{2}(s_0 + 2s_1 + 2s_2) = \underline{0.77727} \qquad &\text{(trapez)} \\ \tilde{C}(1) &= \frac{h}{3}(s_0 + 4s_1 + 2s_2) = \underline{0.77991} \qquad &\text{(Simpson)} \end{aligned}$$

b) Benyttes $f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$ fås:

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\pi t \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad f'(0) = 0\,, \quad f'(1) = -\pi \\ f''(t) &= -\pi \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t^2\right) - (\pi t)^2 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t^2\right) \\ f'''(t) &= -3\pi^2 t \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t^2\right) + (\pi t)^3 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t^2\right) \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 0\,, \quad f'''(1) = \pi^3 \end{aligned}$$

og fejlene bliver

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{h^2}{12}\Big[f'(1) - f'(0)\Big] = -\frac{0.1^2}{12}(-\pi) = \underline{0.00262} \qquad &\text{(trapez)} \\ \epsilon &= -\frac{h^4}{180}\Big[f'''(1) - f'''(0)\Big] = -\frac{0.1^4}{180}\pi^3 = \underline{-1.7 \cdot 10^{-5}} \qquad &\text{(Simpson)} \end{aligned}$$

og dermed

$$C(1) \simeq \tilde{C}(1) + \epsilon = 0.77989 \qquad \text{(trapez og Simpson)}$$

Simpsons algoritme $\Rightarrow$ $C(1) = 0.77991$ med en fejl $\leq 2 \cdot 10^{-5}$. Udnyttes dette ses, at $\tilde{C}(1) + \epsilon$ forbedrer nøjagtigheden af trapez-resultatet med en faktor $\sim$ 100. Antages en lignende forbedring af Simpson-resultatet er

$C(1) = 0.77989$ med en fejl $\leq 0.5 \cdot 10^{-5}$

svarende til at afrundingsfejlen dominerer [tabelværdien er C(1)=0.7798934].

Opgave 2

a) Benyttes følgende relationer (se fx side 292)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{ty''\} &= -\frac{d}{ds}\Big[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\Big] = -2sY - s^2Y' + y(0) \\
\mathcal{L}\{y'\} &= sY - y(0) \\
\mathcal{L}\{ty\} &= -\frac{d}{ds}Y(s) = -Y'
\end{aligned}$$

transformeres differentialligningen over i

$$\mathcal{L}\{ty'' + y' + ty\} = -(s^2+1)Y' - sY = 0 \qquad (s > 0)$$

og dermed bliver differentialligningen til bestemmelse af $Y = Y(s)$:

$$Y' + \frac{s}{s^2+1}Y = 0$$

Løsningerne er:

$$\ln|Y| = -\int \frac{s}{s^2+1}ds = -\tfrac{1}{2}\ln(s^2+1) + \text{konstant}$$

eller

$$Y = Y(s) = \frac{A}{\sqrt{s^2+1}} \qquad (A \text{ arbitrær konstant})$$

b) Taylor-rækkeudvikling af Laplace-integralet:

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\Big[f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2!}f''(0)t^2 + \cdots\Big]dt \\
&= \frac{1}{s}f(0) + \frac{1}{s^2}f'(0) + \frac{1}{2!}\frac{2!}{s^3}f''(0) + \frac{1}{3!}\frac{3!}{s^4}f'''(0) + \cdots
\end{aligned}$$

eller

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty}\Big[f(0) + \frac{1}{s}f'(0) + \cdots + \frac{1}{s^n}f^{(n)}(0) + \cdots\Big] = f(0)$$

som det skulle vises. Anvendes dette resultat på den generelle løsning fundet under punkt a) fås

$$\lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{As}{\sqrt{s^2+1}} = A$$

og dermed, at valget $\underline{A = 1}$ betyder at $Y(s)$ er Laplace transformationen af funktionen $y(t)$ med randbetingelsen $y(0) = 1$, eller

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

Opgave 3

a) Normering af sandsynlighedstætheden giver:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} c\,dx = ac = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{c = \frac{1}{a}}$$

Middelværdien $\langle X \rangle = 0$, dvs. at variansen bliver

$$\sigma_1^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \langle X^2 \rangle = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 \frac{dx}{a} = 2\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 \frac{1}{a} = \underline{\frac{a^2}{12}}$$

For den diskrete fordeling er $\langle X_i \rangle = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b = 0$ og

$$\sigma^2 = \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}(-b)^2 - 0 = b^2$$

og dermed at $\sigma^2 = \sigma_1^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{b = \frac{a}{\sqrt{12}}}.$

$y(n) = \pm b \pm b \pm \cdots \pm b$ (n tal) med sandsynligheden $\frac{1}{2}$ for at fortegnet foran de enkelte b'er er $+$, eller

$$P(i \text{ plustegn}) = \binom{n}{i}\frac{1}{2^n}$$

(binomialfordeling med $p = \frac{1}{2}$). Med i plusser bliver $y = y_i = ib - (n-i)b = (2i-n)b \Rightarrow$

$$f_n(y_i) = \binom{n}{i}\frac{1}{2^n} \quad , \quad \text{hvor } y_i = (2i-n)b \text{ og } i = 0,\, 1,\, 2, \ldots, n.$$

b) I grænsen $n \gg 1$ kan $Y(n)$ tilnærmes med normalfordelingen, uanset valg af $f(x)$, med $\mu = 0$ og

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_1^2 = \frac{n}{12}a^2$$

Dermed har $Y(n)/\sigma_n$ tilnærmelsesvis fordelingsfunktionen $\Phi(z = y(n)/\sigma_n)$, eller

$$\begin{aligned} P(-5a < Y(n) \le 5a) &= P(-5a/\sigma_n < Z \le 5a/\sigma_n) \\ &= \Phi(5a/\sigma_n) - \Phi(-5a/\sigma_n) = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

for $n = n_0$. Opslag i Tabel 8 viser at $z(D) = 0.674$ og

$$z(D) = \frac{5a}{\sigma_{n_0}} = \frac{5a}{a\sqrt{n_0/12}} = 0.674$$

betyder at

$$n_0 \simeq 12\left(\frac{5}{0.674}\right)^2 = 660.4 \quad \text{eller} \quad \underline{n_0 = 661} \quad (\pm 1)$$

Opgave 4

a) De inverse elementer er: $Q^{-1} = \{1, -1, -i, i, -j, j, -k, k\}$.

Idet $(\pm i)^2 = -1$ fås at $(\pm i)^4 = 1$ (og tilsvarende for j og k), dvs. at de 6 elementer $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$ har ordenen 4. -1 har ordenen 2 (og 1 har ordenen 1).

Konjugationsklasser:
± 1 kommuterer med alle elementer, og dermed udgør 1 og -1 hver sin egen konjugationsklasse. Desuden er $j^{-1}ij = -jij = -jk = -i$ og $-kik = -jk = -i$, som medfører, at i og $-i$ er i samme konjugationsklasse og, at de to elementer ikke er i klasse med andre (analogt for j og k). Der er alt i alt 5 konjugationsklasser:

$K(1) = \{1\}$; $K(-1) = \{-1\}$;
$K(i) = \{i, -i\}$; $K(j) = \{j, -j\}$; $K(k) = \{k, -k\}$

b) Undergruppernes orden er divisor i $r = 8 \Rightarrow h = 2$ eller 4, og de er

1 undergruppe af orden 2: $\{1, -1\}$.

3 undergrupper af orden 4: $\{1, i, -1, -i\}$, $\{1, j, -1, -j\}$ og $\{1, k, -1, -k\}$.

Alle 4 (egentlige) undergrupper er invariante, fordi hver af dem kun indeholder hele konjugationsklasser. [De tre 4. ordens undergrupper har index 2 og må derfor være invariante].

Antallet af ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer
= antallet af konjugationsklasser = $\underline{5}$.

Repræsentationernes grader, n_1 – n_5, bestemmes af

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 = r = 8$$

som har løsningen $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1, \quad n_5 = 2$.

Karaktertavle:

	$K(1)$	$K(-1)$	$2K(i)$	$2K(j)$	$2K(k)$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
A_3	1	1	-1	-1	1
A_4	1	1	-1	1	-1
E	2	-2	0	0	0

Kommentarer til karaktertavlen:
1) $\chi(1) = n_i$
2) Alle konjugationsklasser indeholder både et element og dets inverse $\Rightarrow$ alle karakterer er reelle, og i de éndimensionale tilfælde er $\chi_A = \pm 1$.
3) Ortogonalitet af rækker $\Rightarrow$ $\chi_A(-1) = \chi_A(1) = 1$ er eneste løsning, og de resterende éndimensionale karakterer er derefter bestemt ved at benytte $\chi_A = +1$ eller -1.
4) χ_E udfyldes (for eksempel) ved at udnytte ortogonalitet af søjler.

Opgave 5

a) $g(x)$ er en ulige periodisk funktion med perioden $2L = 2$, og ifølge teorem 1 (side 581) er

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

med

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx = \frac{2}{(n\pi)^2}\int_0^{n\pi} z\sin z\,dz \\ &= \frac{2}{(n\pi)^2}\Big[\sin z - z\cos z\Big]_0^{n\pi} = \frac{2}{(n\pi)^2}\Big(-n\pi\cos(n\pi)\Big) = -\frac{2}{n\pi}(-1)^n \end{aligned}$$

b) Funktionen $\tilde{u}(x,t) = u(x,t) + ax$, hvor a er en arbitrær konstant, opfylder varmeledningsligningen når $u(x,t)$ er en løsning [$\partial\tilde{u}/\partial t = \partial u/\partial t$ og $\partial^2\tilde{u}/\partial x^2 = \partial^2 u/\partial x^2$]. Benyttes $a = -1$ er

$$\tilde{f}(x) = \tilde{u}(x,0) = f(x) + ax = f(x) - x = \begin{cases} -x & 0 \le x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

og dermed opfylder $\tilde{u}(x,t)$ randbetingelserne $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = 0$. Ifølge (10) og (11) på side 647 er løsningen i dette tilfælde:

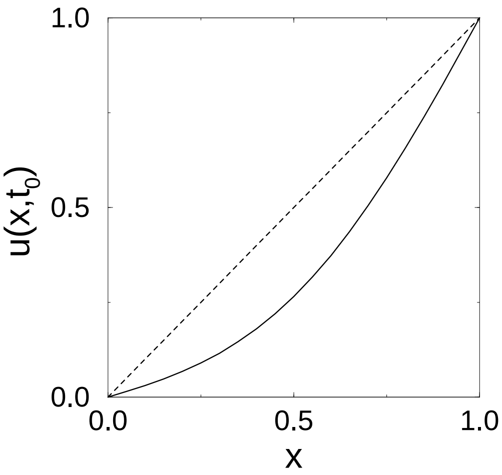
$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x)\,e^{-\lambda_n^2 t} \qquad (\lambda_n = cn\pi)$$

og

$$B_n = 2\int_0^1 \tilde{f}(x)\sin(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 (-x)\sin(n\pi x)\,dx = \frac{2}{n\pi}(-1)^n$$

Indsættes dette resultat fås den ønskede løsning:

$$u(x,t) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n\pi}\sin(n\pi x)\,e^{-\lambda_n^2 t}$$



For $t = t_0 = 1/(\pi c)^2 = \lambda_1^{-2}$ er:

$u(x,t_0)$

$\simeq x - \frac{2}{\pi e}\sin(\pi x) + [\frac{1}{\pi e^4}\sin(2\pi x)]$

$= x - 0.234\sin(\pi x) + [0.006\sin(2\pi x)]$

idet de næste led er forsvindende små.

$u(0.5, t_0) = 0.266$ – og tangenthældningen i $x = 0$ og $x = 1$ er henholdsvis 0.30 og 1.77.