Opgave 1

a) Simpsons algoritme med $2m = 6$ og $h = 0.1$:

$$\begin{aligned} s_0 &= f_0 + f_6 = 3.30560 \\ s_1 &= f_1 + f_3 + f_5 = 4.47370 \\ s_2 &= f_2 + f_4 = 2.89920 \end{aligned}$$

som medfører at

$$\tilde{J} = \frac{h}{3}(s_0 + 4s_1 + 2s_2) = \underline{0.899960}$$

Den fjerde afledede regnes for konstant i intervallet $[f^{(4)}(t) = M_4 = 24]$ og dermed er:

$$\epsilon_s = -M_4 \frac{(b-a)^5}{180(2m)^4} = -24\frac{0.6^5}{180 \cdot 6^4} = \underline{-0.8 \cdot 10^{-5}}$$

[Tabelværdier og $M_4 = 24$ er resultater af antagelsen $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, og i dette tilfælde er $J = \tilde{J} + \epsilon_s = 0.899952$].

b) Benyttes Kreyszigs betegnelser kan følgende tabel opstilles:

x_j	f_j	Δf_j	$\Delta^2 f_j$	$\Delta^3 f_j$
0	1.0			
		0.1111		
0.1	1.1111		0.0274	
		0.1385		0.0096
0.2	1.2496		0.0370	
		0.1755		
0.3	1.4251			

[opstilles næste linie i tabellen fås $\Delta^4 f_0 = 0.0024 = M_4 h^4$].

Benyttes ligning (14)–(16) i §17.3 (§18.3 i 7.ed.)
med $x_0 = 0$, $x = 0.15 \Rightarrow r = \dfrac{x - x_0}{h} = 1.5$ fås

$$\begin{aligned} p_3(0.15) &= f_0 + r\,\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0 \\ &= 1.0 + 1.5 \cdot 0.1111 + 0.375 \cdot 0.0274 - 0.0625 \cdot 0.0096 = \underline{1.176325} \end{aligned}$$

hvor $f(0.15) \simeq p_3(0.15)$ med fejlen

$$\epsilon_3 = \frac{h^4}{4!} r(r-1)(r-2)(r-3)\, f^{(4)}(t) = \frac{0.1^4}{24} 1.5 \cdot 0.5(-0.5)(-1.5)24 = \underline{0.56 \cdot 10^{-4}}$$

[Benyttes $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ fås $f(0.15) = p_3(0.15) + \epsilon_3 = 1.1763813$].

Ørsted Laboratoriet, September 2003

Opgave 2

a)

j	t_j	$f_j = \cos\left(\frac{\pi}{2}t_j^2\right)$
0	0	1.00000
1	0.1	0.99988
2	0.2	0.99803
3	0.3	0.99002
4	0.4	0.96858
5	0.5	0.92388
6	0.6	0.84433
7	0.7	0.71813
8	0.8	0.53583
9	0.9	0.29404
10	1.0	0

$$
\begin{aligned}
s_0 &= f_0 + f_{10} = 1 \\
s_1 &= f_1 + f_3 + \cdots + f_9 = 3.92595 \\
s_2 &= f_2 + f_4 + \cdots + f_8 = 3.34677
\end{aligned}
$$

og dermed

$$
\begin{aligned}
\tilde{C}(1) &= \frac{h}{2}(s_0 + 2s_1 + 2s_2) = \underline{0.77727} \qquad &\text{(trapez)} \\
\tilde{C}(1) &= \frac{h}{3}(s_0 + 4s_1 + 2s_2) = \underline{0.77991} \qquad &\text{(Simpson)}
\end{aligned}
$$

b) Benyttes $f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$ fås:

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= -\pi t \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad f'(0) = 0\,, \quad f'(1) = -\pi \\
f''(t) &= -\pi \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t^2\right) - (\pi t)^2 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t^2\right) \\
f'''(t) &= -3\pi^2 t \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t^2\right) + (\pi t)^3 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t^2\right) \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 0\,, \quad f'''(1) = \pi^3
\end{aligned}
$$

og fejlene bliver

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= -\frac{h^2}{12}\Big[f'(1) - f'(0)\Big] = -\frac{0.1^2}{12}(-\pi) = \underline{0.00262} \qquad &\text{(trapez)} \\
\epsilon &= -\frac{h^4}{180}\Big[f'''(1) - f'''(0)\Big] = -\frac{0.1^4}{180}\pi^3 = \underline{-1.7\cdot 10^{-5}} \qquad &\text{(Simpson)}
\end{aligned}
$$

og dermed

$$
C(1) \simeq \tilde{C}(1) + \epsilon = 0.77989 \qquad \text{(trapez og Simpson)}
$$

Simpsons algoritme $\Rightarrow$ $C(1) = 0.77991$ med en fejl $\leq 2\cdot 10^{-5}$. Udnyttes dette ses, at $\tilde{C}(1) + \epsilon$ forbedrer nøjagtigheden af trapez-resultatet med en faktor $\sim$ 100. Antages en lignende forbedring af Simpson-resultatet er

$C(1) = 0.77989$ med en fejl $\leq 0.5\cdot 10^{-5}$

svarende til at afrundingsfejlen dominerer [tabelværdien er C(1)=0.7798934].

Opgave 3

a) Benyttes (4a) side 851 (side 939 i 7.ed.) fås:

$$\begin{aligned} p_3(x) = {} & 2\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 1\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\ & + (-2)\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 3\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \\ = {} & -\frac{1}{3}\Big(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\Big) + \frac{1}{2}\Big(x^3 - 5x^2 + 6x\Big) \\ & + \Big(x^3 - 4x^2 + 3x\Big) + \frac{1}{2}\Big(x^3 - 3x^2 + 2x\Big) \end{aligned}$$

eller

$$\underline{p_3(x) = \tfrac{5}{3}\,x^3 - 6x^2 + \tfrac{10}{3}\,x + 2}$$

b) Newtons iterationsmetode er beskrevet i tabel 17.1 side 842 (tabel 18.1 side 930 i 7.ed.):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p_3(x_n)}{p_3'(x_n)}\,, \qquad p_3'(x) = 5x^2 - 12x + \tfrac{10}{3}$$

fås

n	x_n	$p_3(x_n)$	$p_3'(x_n)$
0	1	1	−3.666667
1	1.272727	−0.040571	−3.840220
2	1.262163	0.000039	−3.847346
3	1.262173	0.000000	

og dermed $\underline{x_p = 1.26217}$

c) Vurdering af fejlen ved at tilnærme $f(x)$ med $p_3(x)$ er givet ved (5) på side 851 (939):

$$|\epsilon| = |\epsilon_3(x_p)| = \frac{1}{4!}\Big|(x_p-0)(x_p-1)(x_p-2)(x_p-3)f^{(4)}(t \approx x_p)\Big| = \underline{0.0177}$$

Vi har, at

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \simeq f'(x) \simeq p_3'(x)$$

og dermed at fejlen $|\epsilon|$ svarer til en variation af x, som er

$$|\Delta x| \simeq \left|\frac{\epsilon}{p_3'(x_p)}\right| = \frac{0.0177}{3.85} = 0.0046$$

Dvs. at løsningen af $f(x) = 0$, når $1 < x < 2$, må forventes at ligge i intervallet $x_p - |\Delta x| < x < x_p + |\Delta x|$, eller

$$\underline{1.257 < x < 1.267}$$

Opgave 4

a) Ifølge Kreyszig §17.3 (§18.3 i 7.ed.), ligning (6)–(7), haves:

$$f(x) = p_4(x) = p_3(x) + a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

hvor

$$a_4 = \frac{f_4 - p_3(x_4)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} = \frac{1 - 13}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

og dermed

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 4x^2 + 3x + 1 - \tfrac{1}{2}x(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= x^3 - 4x^2 + 3x + 1 - \tfrac{1}{2}x^4 + 3x^3 - \tfrac{11}{2}x^2 + 3x \\ &= \underline{-\tfrac{1}{2}x^4 + 4x^3 - \tfrac{19}{2}x^2 + 6x + 1} \end{aligned}$$

Integreres funktionen fås

$$\int_0^4 f(x)dx = \Big[-\tfrac{1}{10}x^5 + x^4 - \tfrac{19}{6}x^3 + 3x^2 + x \Big]_0^4 = \frac{44}{15} = \underline{2.9333}$$

b) Benyttes Kreyszigs notation i Tabel 17.4 (18.4 i 7.ed.) om Simpsons algoritme fås:

$$s_0 = f_0 + f_4 = 2; \;\; s_1 = f_1 + f_3 = 2; \;\; s_2 = f_2 = -1$$

og idet $h = 1$ fås

$$\tilde{J} = \frac{h}{3}(s_0 + 4s_1 + 2s_2) = \frac{1}{3}(2 + 8 - 2) = \frac{8}{3} = \underline{2.6667}$$

For at vurdere fejlen ϵ udregnes:

$$f'''(x) = -12x + 24 \quad \text{og dermed} \quad f'''(0) = 24; \quad f'''(4) = -24$$

og vi får:

$$\epsilon \simeq -\frac{h^4}{180}\Big[f'''(b) - f'''(a)\Big] = -\frac{1}{180}(-24 - 24) = \frac{4}{15} = \underline{0.2667}$$

som er identisk med den korrekte størrelse af fejlen:

$$\epsilon = J - \tilde{J} = \frac{44}{15} - \frac{8}{3} = 2.9333 - 2.6667 = \underline{0.2667}$$

(Vurderingen af fejlen udnytter en fjerdegrads-polynomium-tilnærmelse, som er eksakt i dette tilfælde).

Opgave 5

a) Anvendes Lagrange interpolations metode, (3a) og (3b) i §17.3 (§18.3 i 7. udgave) fås:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f_0 \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + f_1 \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + f_2 \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \\ &= \frac{f_0}{2}\Big(x^2 - 5x + 6\Big) - f_1\Big(x^2 - 4x + 3\Big) + \frac{f_3}{2}\Big(x^2 - 3x + 2\Big) \\ &= \underline{0.02865x^2 - 0.62725x + 1.3638} \end{aligned}$$

Ligningen $J_0(x) \simeq p_2(x) = 0$ for $1 < x < 3$ har løsningen $\tilde{x} = \underline{2.4480}$. Benyttes ligning (5) i Kreyszig haves

$$\epsilon_2(\tilde{x}) \simeq (\tilde{x} - x_0)(\tilde{x} - x_1)(\tilde{x} - x_3) J_0'''(\tilde{x})/3! = \underline{-0.020}$$

b) Benyttes intervallængden $h = 0.1\pi$ fås, idet $g_j = g(\tilde{x}, \theta_j)$

j	θ_j	$\frac{\pi}{2} g_j = \cos(2.448 \sin\theta)$
0	0	1.00000
1	0.1π	0.72726
2	0.2π	0.13152
3	0.3π	−0.39831
4	0.4π	−0.68703
5	0.5π	−0.76895

og trapez-metoden giver

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\tilde{x}) &= h\Big[0.5(g_0 + g_5) + (g_1 + g_2 + g_3 + g_4)\Big] \\ &= 0.1\pi \frac{2}{\pi}\Big[0.11553 - 0.22656\Big] = \underline{-0.0222} \end{aligned}$$

Idet $\frac{\pi}{2} g(2.448, \theta = 0.25\pi) = -0.15952$ fås i tilfældet $h = 0.25\pi$

$$\tilde{J}(\tilde{x}) = 0.25\pi \frac{2}{\pi}\Big[0.11553 - 0.15952\Big] = \underline{-0.0220}$$

Antages $\epsilon_J \propto h^2$ ved trapez-metoden er fejlen i første regning 2.5^2 gange mindre end i andet tilfælde og dermed $1/(2.5^2 - 1)$ gange differensen mellem de to resultater, dvs. $\epsilon_J \approx [-0.0222 - (-0.0220)]/5.25 = \underline{-3.8 \cdot 10^{-5}}$.

Ved at udnytte $J_0(\tilde{x}) = -0.0222$ kan bestemmelsen af nulpunktets position $\overline{x}$ forbedres:

$$\begin{aligned} &\overline{x} \simeq \tilde{x} - J_0(\tilde{x})/J_0'(\tilde{x}) \\ &J_0'(\tilde{x}) \simeq p_2'(\tilde{x}) = 2 \cdot 0.02865\,\tilde{x} - 0.62725 = -0.4870 \\ &\overline{x} = \underline{2.4024} \end{aligned}$$

[Det korrekte resultat er 2.4048].

Opgave 6

a) Med $h = 0.1\pi$ fås følgende værdier for x_j og $f_j = 1/\sin x_j$

j	x_j	f_j	$g_j = f_j - \frac{1}{x_j}$
0	0.1π	3.23607	0.05297
1	0.2π	1.70130	0.10975
2	0.3π	1.23607	0.17504
3	0.4π	1.05146	0.25569
4	0.5π	1.00000	0.36338

$s_0 = f_0 + f_4 = 4.23607 \quad ; \quad s_1 = f_1 + f_3 = 2.75276 \quad ; \quad s_2 = f_2 = 1.23607$

Simpsons algoritme med $2m = 4$ eller $h = 0.1\pi$ giver resultatet:

$$\tilde{J}_a = \frac{h}{3}(s_0 + 4s_1 + 2s_2) = \underline{1.85556}$$

Den analytiske udtryk for integralet giver $J = 1.84273$ og dermed er fejlen:

$$\epsilon = J - \tilde{J}_a = \underline{-0.01283}$$

b) Fra søjlen med $g_j = f_j - \frac{1}{x_j}$ fås

$s_0 = g_0 + g_4 = 0.41635 \quad ; \quad s_1 = g_1 + g_3 = 0.36544 \quad ; \quad s_2 = g_2 = 0.17504$

$$\tilde{J}_1 = \frac{h}{3}(s_0 + 4s_1 + 2s_2) = \underline{0.23334}$$

og dermed

$$\tilde{J}_b = \int_{0.1\pi}^{0.5\pi} \frac{1}{x}\, dx + \tilde{J}_1 = \ln 5 + 0.233335 = \underline{1.84277}$$

De afledede af $f(x)$ og $g(x) = f(x) - \frac{1}{x}$ er

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \quad ; \quad f''(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{2\cos^2 x}{\sin^3 x}$$

$$f'''(x) = -\frac{5\cos x}{\sin^2 x} - \frac{6\cos^3 x}{\sin^4 x} \quad ; \quad g'''(x) = f'''(x) + \frac{6}{x^4}$$

Dermed fås følgende fejlvurderinger:

$$\epsilon_a = -\frac{h^4}{180}[f'''(b) - f'''(a)] = -\frac{(0.1\pi)^4}{180}(0 + 615.830) = \underline{-0.03333}$$

$$\epsilon_b = -\frac{h^4}{180}[g'''(b) - g'''(a)] = -\frac{(0.1\pi)^4}{180}(0.986 - 0.129) = \underline{-4.6 \cdot 10^{-5}}$$

Polynomium-beskrivelsen, som udnyttes i Simpsons algoritme, er ikke en god tilnærmelse til $f(x)$ for $x \approx 0$. Det betyder, at udregningen i a) giver en stor fejl og at fejlvurderingen ϵ_a er næsten en faktor 3 forkert. Fremgangsmåden i b) giver et meget bedre resultat for J og en korrekt vurdering af fejlens størrelse ($\epsilon = -4.2 \cdot 10^{-5}$).

Opgave 7

a) Benyttes Kreyszigs betegnelser i afsnit 17.3 kan følgende tabel opstilles:

x_j	f_j	Δf_j	$\Delta^2 f_j$	$\Delta^3 f_j$
0	1.0			
		-0.134		
1	0.866		-0.232	
		-0.366		0.098
2	0.5		-0.134	
		-0.5		
3	0.0			

$$h = 1 \text{ og } r = \frac{x - x_0}{h} = x \text{ og dermed } f(x) \simeq p_3(x) = \sum_{s=0}^{3} \binom{x}{s} \Delta^s f_0 \quad \text{eller}$$

$$f(x) \simeq 1.0 + x(-0.134) + \frac{x(x-1)}{2}(-0.232) + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}\, 0.098$$

$$\epsilon(x) = f(x) - p_3(x) \simeq \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} f^{(4)}(t)\,; \quad f^{(4)}(t) \simeq 0.05$$

Udtrykkene udledes fra Kreyszig §17.3, ligning (14) og (16), og giver følgende

$$f(0.5) \simeq \underline{0.9681} \quad ; \quad \epsilon(0.5) = \underline{-0.0020}$$
$$f(1.5) \simeq \underline{0.7059} \quad ; \quad \epsilon(1.5) = \underline{\;\; 0.0012}$$
$$f(2.5) \simeq \underline{0.2606} \quad ; \quad \epsilon(2.5) = \underline{-0.0020}$$

b) Trapez-metoden, §17.5 ligning (2), giver resultatet ($h = 1$):

$$\tilde{J}_1 = h(0.5f_0 + f_1 + f_2 + 0.5f_3) = 0.5 + 0.866 + 0.5 + 0 = \underline{1.8660}$$

Benyttes $f''(t) \approx \frac{1}{3}[f'(3) - f'(0)] \approx \langle \Delta^2 f_j \rangle \simeq \frac{1}{2}(-0.232 - 0.134) \simeq -0.18$ fås fra §17.5 ligning (3) eller Supplementets ligning (1.1):

$$\epsilon_1 \simeq -\frac{h^2}{12}(3-0)f''(t) \simeq -\frac{h^2}{12}[f'(3) - f'(0)] \simeq \underline{0.045}$$

Simpsons algoritme, §17.5 Table 17.4, giver følgende resultat ($h = 0.5$):

$$\tilde{J}_2 = (h/3)[\{f_0 + f_3\} + 2\{f_1 + f_2\} + 4\{f(0.5) + f(1.5) + f(2.5)\}]$$
$$\simeq (0.5/3)[1.0 + 2 \cdot 1.366 + 4 \cdot 1.9346] = \underline{1.9117}$$

I dette tilfælde er der to bidrag til fejlen, dels bidraget som skyldes Simpson tilnærmelsen ved udregning af J [§17.5 ligning (8) eller Supplementet (1.2)] og dels fejlen ved at benytte interpolationsværdierne for $f(x)$:

$$\epsilon_2 \simeq -\frac{h^4}{180}(3-0)f^{(4)}(t) + \frac{4h}{3}[\epsilon(0.5) + \epsilon(1.5) + \epsilon(2.5)]$$
$$= -\frac{(0.5)^4}{180}\, 3 \cdot 0.05 + \frac{2}{3}(-0.0028) = -0.5 \cdot 10^{-4} - 0.00187 = \underline{-0.0019}$$

Fejlen domineres af bidraget fra interpolationen, men er stadigvæk en faktor ~ 20 mindre end ved den simple udregning. Dvs. benyttes (højere ordens) interpolation kan fejlen ved udregning af et integral reduceres betydeligt.

Bemærk, at trapez-metoden kun ville have reduceret fejlen med en faktor 4. Eksempel: $f(x) = \cos(\pi x/6) \Rightarrow J = 6/\pi = 1.9099$.

Opgave 8

a) Idet Laplace-transformen af y betegnes $Y = \mathcal{L}\{y\}$ fås

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0) = sY - 1 = \mathcal{L}\{x - y\} = \frac{1}{s^2} - Y$$

eller

$$(s+1)Y = 1 + \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2(s+1)} = \underline{\frac{2}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}}$$

Den inverse Laplace-transformation af denne ligning giver resultatet:

$$y = y(x) = \underline{2\,e^{-x} + x - 1} \qquad ; \qquad y(1) = \underline{0.7358}$$

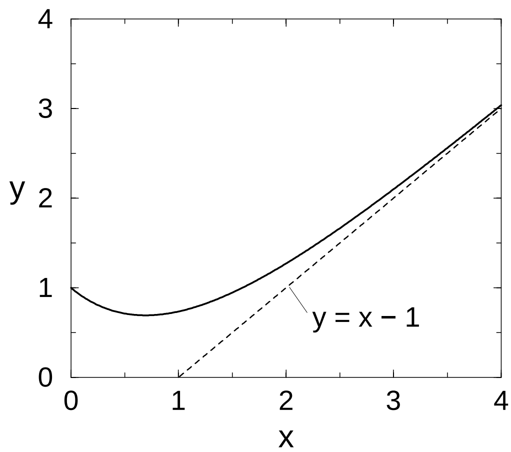
b) Runge-Kutta algoritmen er beskrevet i tabel 19.4 side 948 (tabel 20.4 side 1040 i 7.ed.). Her er $h = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, og $f(x, y) = x - y$:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0, y_0) = hf(0, 1) = -1 \\
k_2 &= hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = hf(0.5, 0.5) = 0 \\
k_3 &= hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_2) = hf(0.5, 1) = -0.5 \\
k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = hf(1, 0.5) = 0.5
\end{aligned}$$

og dermed

$$y(1) \simeq y_1 = 1 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \tfrac{1}{6}(-1 + 0 - 1 + 0.5) = \underline{0.75}$$

c) Funktionen $y = y(x)$ går gennem $(x, y) = (0, 1)$ med hældningen $y' = -1$ og gennem $(x, y) = (1, 0.7358)$ med hældningen $y' = x - y = 0.2642$.
y' skifter fortegn mellem de to punkter, og minimumspunktet bestemmes af $y' = x - y = -2\exp(-x) + 1 = 0$, som har løsningen
$x = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad y = \ln 2 = 0.6931$.
I grænsen $x \to \infty$ fås den asymptotiske opførsel $y(x) \to y = x - 1$.



Opgave 9

a) Den Laplace transformerede af foldningsintegralet

$$f(t) = \int_0^t \tau \sin(t-\tau) d\tau = t * \sin t$$

er

$$F(s) = \mathcal{L}\{t\}\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2+1} = \underline{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}}$$

og dermed

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \underline{t - \sin t}$$

og idet $\sin(\pi/2 - \tau) = \cos\tau$ fås for $t = \pi/2$

$$f(\pi/2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau \cos\tau d\tau = \frac{\pi}{2} - 1 = \underline{0.57080}$$

b) Funktionen $g(\tau) = \tau\cos\tau$ med intervalopdelingen $h = 0.1\pi$, mellem $a = 0$ og $b = \pi/2$, er beskrevet ved følgende tabel $[g_j = g(\tau_j)]$:

j	τ_j	g_j
0	0	0
1	0.1π	0.29878
2	0.2π	0.50832
3	0.3π	0.55397
4	0.4π	0.38832
5	0.5π	0

Benyttes trapez-metoden fås:

$$\tilde{f}(\pi/2) = h\Big[\tfrac{1}{2}g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + \tfrac{1}{2}g_5\Big] = 0.1\pi \cdot 1.74939 = \underline{0.54959}$$

Idet $g'(t) = \cos\tau - \tau\sin\tau$, og dermed $g'(0) = 1$ og $g'(\pi/2) = -\pi/2$, fås

$$\epsilon = -\frac{h^2}{12}\Big[g'(b) - g'(a)\Big] = -\frac{(0.1\pi)^2}{12}\Big(-\frac{\pi}{2} - 1\Big) = \underline{0.02114}$$

Den relative forskel mellem den tilnærmede værdi af integralet

$$f(\pi/2) \simeq \tilde{f}(\pi/2) + \epsilon = \underline{0.57073}$$

og den korrekte værdi er af størrelsesordenen 10^{-4}.

Opgave 10

a) Benyttes relationerne $\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$ og $\mathcal{L}_x\{x\} = 1/s^2$ transformeres differentialligningen over i

$$\mathcal{L}\{y' = y + 2x\} \quad \Rightarrow \quad sY - 1 = Y + \frac{2}{s^2} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \underline{\frac{s^2+2}{s^2(s-1)}}$$

Omskrivning af brøken

$$Y(s) = \frac{s^2+2}{s^2(s-1)} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s} = \frac{as^2 + bs - b + cs^2 - cs}{s^2(s-1)}$$

giver resultatet: $a + c = 1$, $b - c = 0$, $-b = 2$ eller $b = c = -2$ og $a = 3$ og dermed

$$Y(s) = \frac{3}{s-1} - \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s} \quad \Rightarrow \quad \underline{y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 3\,e^x - 2x - 2}$$

b) Algoritmen for Eulers forberede metode er opstillet i Table 19.2 (20.2 i 7. udgave), og vi har følgende parameterværdier:

$$h = 0.2 \qquad ; \qquad f(x_n, y_n) = y_n + 2x_n \qquad ; \qquad x_0 = 0,\ y_0 = 1$$

Udnyttes ligningerne (7a) og (7b) i §19.1 [(5a) og (5b) i §20.1 i 7. udgave] fås:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^\star_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n))] \\
&= y_n + \tfrac{1}{2}h[y_n + 2x_n + \{y_n + h(y_n + 2x_n) + 2x_{n+1}\}] \\
&= (1 + h + \tfrac{1}{2}h^2)y_n + (h + h^2)x_n + h(x_n + h) \\
&= 1.22\,y_n + 0.44\,x_n + 0.04 = y_n + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)
\end{aligned}$$

I tabelform bliver resultatet, idet $k_1 = hf(x_n, y_n)$, $k_2 = hf(x_{n+1}, y_n + k_1)$,

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	$\frac{y(x_n)-y_n}{y(x_n)}$	k_1	k_2
0	0.0	1	1	0	0.2	0.32
1	0.2	1.26	1.2642	0.0033	0.332	0.4784
2	0.4	1.6652	1.6755	0.0061	0.4930	0.6717
3	0.6	2.2475	2.2664	0.0083	0.6895	0.9074
4	0.8	3.0460	3.0766	0.0099	0.9292	1.1950
5	1.0	4.1081	4.1548	0.0112		

De resultater, der er bedt om, er:

$$\tilde{y}(1) = y_5 = \underline{4.108} \qquad \text{og} \qquad \epsilon_r = \frac{y(x_5) - y_5}{y(x_5)} = \underline{0.011}$$

Opgave 11

a) Den Laplace transformerede differentialligning er

$$\mathcal{L}\{y' = y + x^2\} \quad \Rightarrow \quad sY - y(0) = Y + \frac{2}{s^3} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \underline{\frac{2}{s^3(s-1)}}$$

Omskrivning af brøken

$$Y(s) = \frac{2}{s^3(s-1)} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s^3} + \frac{c}{s^2} + \frac{d}{s} = \frac{as^3 + (s-1)(b + cs + ds^2)}{s^3(s-1)}$$

giver resultatet $a + d = 0$, $c - d = 0$, $b - c = 0$, og $-b = 2$,
eller $a = -b = -c = -d = 2$ og dermed

$$Y(s) = \frac{2}{s-1} - \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s} \quad \Rightarrow \quad \underline{y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2\,e^x - x^2 - 2x - 2}$$

b) Algoritmen for Eulers forberede metode er opstillet i tabel 19.2 og

$$h = 0.2 \qquad ; \qquad f(x_n, y_n) = y_n + x_n^2 \qquad ; \qquad x_0 = 0,\ y_0 = 0$$

Udnyttes ligningerne (7a) og (7b) i §19.1 fås:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^\star_{n+1})] \quad \text{og} \\
y^\star_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(y_n + x_n^2) \quad \Rightarrow \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{2}h[y_n + x_n^2 + \{y_n + h(y_n + x_n^2) + (x_n + h)^2\}] \\
&= 1.22\,y_n + 0.22\,x_n^2 + 0.04\,x_n + 0.004
\end{aligned}$$

Benyttes tabel 19.2 direkte haves

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2), \ \text{hvor } k_1 = hf(x_n, y_n) \text{ og } k_2 = hf(x_{n+1}, y_n + k_1)$$

På tabelform bliver resultatet

n	x_n	y_n	k_1	k_2
0	0.0	0.0	0.0	0.008
1	0.2	0.004	0.0088	0.03456
2	0.4	0.02568	0.03714	0.08456
3	0.6	0.08653	0.08931	0.16317
4	0.8	0.21277	0.17055	0.27666
5	1.0	0.43638		

og dermed er svaret: $\tilde{y}(1) = y_5 = \underline{0.43638}$

Den korrekte værdi er $y(1) = 0.43656$ og dermed bliver den relative fejl:

$$\epsilon_r = \frac{y(1) - \tilde{y}(1)}{y(1)} = \underline{4.2 \times 10^{-4}}$$

Opgave 12

a) Ifølge tabel 5.9 er $\mathfrak{L}\{2\sqrt{t/\pi}\} = 1/s^{3/2}$ eller $F(s) = \mathfrak{L}\{\sqrt{t}\} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} \quad \Rightarrow$

$$G(s) = \mathfrak{L}\{t^{3/2}\} = \mathfrak{L}\{tf(t)\} = -F'(s) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4s^{5/2}}$$

Benyttes foldningsintegral-sætningen (§5.5 teorem 1) fås

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad Y(s) = F(s)G(s) = \underline{\frac{3\pi}{8s^4}}$$

og dermed

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{Y(s)\} = \underline{\frac{\pi}{16}t^3} \qquad ; \qquad y(1) = \frac{\pi}{16} = \underline{0.19635}$$

b)

j	x_j	f_j
0	0.0	-1.0
1	0.25	-0.75777
2	0.5	-0.45711
3	0.75	-0.17524
4	1.0	0

Trapez metoden med $h = 0.25$ og $f_j = f(x_j) = (x_j^{3/2} - 1)\sqrt{1 - x_j}$

$$\tilde{J} = h[\tfrac{1}{2}(f_0 + f_4) + f_1 + f_2 + f_3] = \underline{-0.47253}$$

Idet

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x(1-x)} - \frac{x^{3/2} - 1}{2\sqrt{1-x}} \qquad \Rightarrow \qquad f'(0) = \tfrac{1}{2}$$

og benyttes l'Hôpitals regel

$$f'(1) = 0 - \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^{3/2} - 1}{2\sqrt{1-x}}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{\frac{3}{2}x^{1/2}}{-(1-x)^{-1/2}}\right] = 0$$

fås følgende vurdering af fejlen

$$\epsilon = -\frac{h^2}{12}[f'(1) - f'(0)] = -\frac{0.25^2}{12}(-0.5) = \underline{0.00260}$$

Benyttes

$$y(1) = J + \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = J + \left[-\tfrac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 = J + \tfrac{2}{3}$$

giver de numeriske regninger at

$$y(1) \simeq \tilde{J} + \epsilon + \tfrac{2}{3} = -0.47253 + 0.00260 + 0.66667 = \underline{0.19674}$$

Den relative fejl er -0.20%. En tilsvarende direkte beregning af $y(1)$ vha. trapez metoden giver resultatet $y(1) = 0.17075 + \epsilon$, hvor fejlen ϵ ikke kan vurderes ved udtrykket ovenfor, idet den afledede af $x^{3/2}\sqrt{1-x} \to -\infty$ for $x \to 1$. Dette viser at polynomium tilnærmelsen til $x^{3/2}\sqrt{1-x}$, som udnyttes i trapez metoden, ikke er pålidelig når x er tæt ved 1.

Opgave 13

a) Laplace transformeres

$$y'' + 2y' + 5y = 5 \qquad ; \quad y(0) = a \quad ; \quad y'(0) = b$$

fås følgende sekulære ligning, hvor $Y = Y(s) = \mathfrak{L}\{y(t)\}$,

$$\begin{aligned} s^2Y - s\,a - b + 2sY - 2a + 5Y &= \frac{5}{s} \\ (s^2 + 2s + 5)Y - (s+2)a - b &= \frac{5}{s} \\ Y(s) &= \underline{\frac{(s+2)a + b}{s^2 + 2s + 5} + \frac{5}{s(s^2 + 2s + 5)}} \end{aligned}$$

En omskrivning af sidste brøk giver

$$\frac{5}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

og dermed

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{s} + \frac{(s+2)(a-1) + b}{(s+1)^2 + 2^2} \\ &= \frac{1}{s} + (a-1)\frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} + \tfrac{1}{2}(a + b - 1)\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

hvoraf fås

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{Y\} = \underline{1 + e^{-t}[(a-1)\cos(2t) + \tfrac{1}{2}(a + b - 1)\sin(2t)]}$$

b)

i) $$\begin{cases} y(0) = 1 + (a-1) = 0 \\ y(\frac{\pi}{4}) = 1 + e^{-\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(a + b - 1) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad ; \quad b = 1$$

og dermed

$$y(t) = \underline{1 + e^{-t}\cos(2t)}$$

ii) Indsættes begyndelsesbetingelserne, $y'(0) = 0$ og $y''(0) = 0$, direkte i differentialligningen fortæller den, at $5y(0) = 5$. Dermed er $y(0) = a = 1$ og $y'(0) = b = 0$ og resultatet er

$$y(t) = \underline{1}$$

Opgave 14

a) Benyttes følgende relationer, se fx side 277 (side 292 i 7.ed.)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{ty''\} &= -\frac{d}{ds}\Big[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\Big] = -2sY - s^2Y' + y(0) \\
\mathcal{L}\{y'\} &= sY - y(0) \\
\mathcal{L}\{ty\} &= -\frac{d}{ds}Y(s) = -Y'
\end{aligned}$$

transformeres differentialligningen over i

$$\mathcal{L}\{ty'' + y' + ty\} = -(s^2+1)Y' - sY = 0 \qquad (s > 0)$$

og dermed bliver differentialligningen til bestemmelse af $Y = Y(s)$:

$$Y' + \frac{s}{s^2+1}Y = 0$$

Løsningerne er:

$$\ln|Y| = -\int \frac{s}{s^2+1}ds = -\tfrac{1}{2}\ln(s^2+1) + \text{konstant}$$

eller

$$Y = Y(s) = \frac{A}{\sqrt{s^2+1}} \qquad (A \text{ arbitrær konstant})$$

b) Taylor-rækkeudvikling af Laplace-integralet:

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\Big[f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2!}f''(0)t^2 + \cdots\Big]dt \\
&= \frac{1}{s}f(0) + \frac{1}{s^2}f'(0) + \frac{1}{2!}\frac{2!}{s^3}f''(0) + \frac{1}{3!}\frac{3!}{s^4}f'''(0) + \cdots
\end{aligned}$$

eller

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty}\Big[f(0) + \frac{1}{s}f'(0) + \cdots + \frac{1}{s^n}f^{(n)}(0) + \cdots\Big] = f(0)$$

som det skulle vises. Anvendes dette resultat på den generelle løsning fundet under punkt a) fås

$$\lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{As}{\sqrt{s^2+1}} = A$$

og dermed, at valget $\underline{A = 1}$ betyder at $Y(s)$ er Laplace transformationen af funktionen $y(t)$ med randbetingelsen $y(0) = 1$, eller

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

Opgave 15

a) Benyttes Heaviside funktionen, $u(t-a)$, kan $v(t)$ skrives:

$$\begin{aligned} v(t) &= V_0 \frac{t}{a}[1-u(t-a)] + V_0 u(t-a) \\ &= \frac{V_0}{a}\Big[t-(t-a)u(t-a)\Big] \end{aligned}$$

og benyttes t-forskydningsreglen, (3) side 267 [(4) side 279 i 7.ed.], fås

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\} = \underline{\frac{V_0}{as^2}\Big(1-e^{-as}\Big)}$$

b) Laplace transformationen af differentialligningen er:

$$V = RI + L[sI - i(0)] = RI + LsI$$

og dermed

$$\begin{aligned} I = I(s) &= \frac{V}{Ls+R} = \frac{V_0}{aL}\frac{1}{s^2(s+\frac{R}{L})}\Big(1-e^{-as}\Big) \\ &= \frac{V_0}{aR}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{\frac{L}{R}}{s+\frac{R}{L}} - \frac{\frac{L}{R}}{s}\right)\Big(1-e^{-as}\Big) \end{aligned}$$

som ved invertering giver resultatet:

$$\underline{i(t) = \frac{V_0}{aR}\left(t - \frac{L}{R}\Big(1-e^{-\frac{R}{L}t}\Big) - u(t-a)\left[t-a-\frac{L}{R}\Big(1-e^{-\frac{R}{L}(t-a)}\Big)\right]\right)}$$

c) For $0 < t \ll a$ er $u(t-a) = 0$ og $e^{-\frac{R}{L}t} \simeq 1 - \frac{R}{L}t + \frac{R^2}{2L^2}t^2$, som indsat giver

$$i(t) \simeq \frac{V_0}{aR}\left[t - \frac{L}{R}\left(\frac{R}{L}t - \frac{R^2}{2L^2}t^2\right)\right] = \underline{\frac{V_0}{2aL}t^2}$$

For $t \to \infty$ er $u(t-a) = 1$ og $e^{-\frac{R}{L}t} \to 0$, og dermed

$$i(t) \to \frac{V_0}{aR}\left(t - \frac{L}{R} - \left[t - a - \frac{L}{R}\right]\right) = \underline{\frac{V_0}{R}}$$

Opgave 16

a)

j	x_j	$x_j - \overline{x}$	$(x_j - \overline{x})^2$
1	31.1	−1.8	3.24
2	35.2	2.3	5.29
3	34.7	1.8	3.24
4	33.0	0.1	0.01
5	30.5	−2.4	5.76
$\sum$	164.5	0.0	17.54

Fra tabellen fås, idet $n = 5$, $\qquad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{164.5}{5} = \underline{32.9}$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2 = \frac{17.54}{4} \qquad \Rightarrow \qquad s = \underline{2.09}$$

90% konfidensintervallet for μ er bestemt ud fra Student's t-fordelingen med $n-1 = 4$ frihedsgrader og $\gamma = 0.9$, dvs.: $F(c) = \frac{1}{2}(1+\gamma) = 0.95 \Rightarrow c = 2.13$ (tabel A9 i 8. og A10 i 7. udgave) og dermed $k = sc/\sqrt{n} = 2.00$. Resultatet er, ifølge Table 23.2 i 8. udgave af Kreyszig (Table 24.6 i 7. udgave):

$$\text{CONF}\{\overline{x} - k < \mu < \overline{x} + k\} = \underline{\text{CONF}\{30.9 < \mu < 34.9\}}$$

b) Det totale antal af mulige udfald er $6 \cdot 6 = 36$. Blandt disse udfald optælles mulighederne for en syver: $1+6$, $6+1$, $2+5$, $5+2$, $3+4$, $4+3$, dvs. af de 36 muligheder er der 6 udfald med syv øjne: $P(7 \text{ øjne}) = p = \frac{6}{36} = \underline{\frac{1}{6}}$.

Sandsynligheden for at slå x syvere i 4 kast er bestemt af binomialfordelingen: $P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{1-x}$ med $n = 4$ og $p = \frac{1}{6}$, dvs.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= \binom{4}{2}(1-p)^2 p^2 + \binom{4}{3}(1-p)p^3 + \binom{4}{4}p^4 \\ &= 6\left(\tfrac{5}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2 + 4\left(\tfrac{5}{6}\right)\left(\tfrac{1}{6}\right)^3 + \left(\tfrac{1}{6}\right)^4 = \underline{0.1319} \end{aligned}$$

Ifølge Kreyszig, ligning (3) og (4) i §22.7 (§23.6 i 7.ed.), er middelværdien af denne fordeling: $\mu = np = 4\frac{1}{6} = \underline{\frac{2}{3}}$ og variansen $\sigma^2 = np(1-p) = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{9}$ og dermed $\sigma = \underline{0.745}$.

Opgave 17

a) Normering af sandsynlighedstætheden giver:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} c\,dx = ac = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{c = \frac{1}{a}}$$

Middelværdien $\langle X \rangle = 0$, dvs. at variansen bliver

$$\sigma_1^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \langle X^2 \rangle = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 \frac{dx}{a} = 2\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 \frac{1}{a} = \underline{\frac{a^2}{12}}$$

For den diskrete fordeling er $\langle X_i \rangle = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b = 0$ og

$$\sigma^2 = \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}(-b)^2 - 0 = b^2$$

og dermed at $\sigma^2 = \sigma_1^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{b = \frac{a}{\sqrt{12}}}$.

$y(n) = \pm b \pm b \pm \cdots \pm b$ (n tal) med sandsynligheden $\frac{1}{2}$ for at fortegnet foran de enkelte b'er er $+$, eller

$$P(i \text{ plustegn}) = \binom{n}{i}\frac{1}{2^n}$$

(binomialfordeling med $p = \frac{1}{2}$). Med i plusser bliver $y = y_i = ib - (n-i)b = (2i-n)b \Rightarrow$

$$f_n(y_i) = \binom{n}{i}\frac{1}{2^n} \quad , \quad \text{hvor } \ y_i = (2i-n)b \ \text{ og } \ i = 0,\, 1,\, 2, \ldots, n.$$

b) I grænsen $n \gg 1$ kan $Y(n)$ tilnærmes med normalfordelingen, uanset valg af $f(x)$, med $\mu = 0$ og

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_1^2 = \frac{n}{12}a^2$$

Dermed har $Y(n)/\sigma_n$ tilnærmelsesvis fordelingsfunktionen $\Phi(z = y(n)/\sigma_n)$, eller

$$\begin{aligned} P(-5a < Y(n) \le 5a) &= P(-5a/\sigma_n < Z \le 5a/\sigma_n) \\ &= \Phi(5a/\sigma_n) - \Phi(-5a/\sigma_n) = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

for $n = n_0$. Opslag i Tabel 8 viser at $z(D) = 0.674$ og

$$z(D) = \frac{5a}{\sigma_{n_0}} = \frac{5a}{a\sqrt{n_0/12}} = 0.674$$

betyder at

$$n_0 \simeq 12\left(\frac{5}{0.674}\right)^2 = 660.4 \quad \text{eller} \quad \underline{n_0 = 661} \quad (\pm 1)$$

Opgave 18

a) Sandsynlighederne er bestemt ved Poisson fordelingen, som har frekvensfunktionen:

$$f_P(x) = \frac{\mu^x}{x!}\,e^{-\mu} = \frac{2^x}{x!\,e^2}$$

hvor x er antallet af henfald i tidsintervallet $t = 2/\lambda$ og $\mu = \lambda t = 2$ er middelværdien. Dvs.

$$P(X \geq 3) = 1 - F_P(2) = 1 - f_P(0) - f_P(1) - f_P(2) = 1 - \frac{1}{e^2}\big(1+2+2\big) = \underline{0.3233}$$

(se også tabel A6 side A88, side A100 i 7.ed.).

b) I grænsen $\mu \gg 1$ er

$$f_P(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \quad \sigma = \sqrt{\mu}$$

Dvs.

$$P(\mu - \Delta\mu \leq X \leq \mu + \Delta\mu) = \int_{\mu-\Delta\mu}^{\mu+\Delta\mu} f_P(x)dx \simeq \Phi(\Delta\mu/\sigma) - \Phi(-\Delta\mu/\sigma) = 0.95$$

som medfører $\Delta\mu/\sigma = 1.960$ (tabel A8). Indsættes $\Delta\mu = 0.05\mu$ og $\sigma = \sqrt{\mu}$ fås

$$\frac{0.05\mu}{\sqrt{\mu}} = 1.960 \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \underline{1537}$$

c) I det generelle tilfælde er $\mu = \lambda t$ og $p(t) = f_P(0) = \exp(-\lambda t)$, dvs.

$$F(t) = \underline{1 - e^{-\lambda t}} \quad , \quad \text{for } t \geq 0$$

Med denne fordelingsfunktion fås:

$$f(t) = F'(t) = \underline{\lambda\, e^{-\lambda t}} \quad , \quad \text{for } t \geq 0$$

og

$$G(u) = \langle \exp(uT) \rangle = \int_0^\infty \lambda e^{(u-\lambda)t}\,dt = \left[\frac{\lambda}{u-\lambda} e^{-(\lambda-u)t}\right]_0^\infty = \underline{\frac{\lambda}{\lambda - u}}$$

idet det er forudsat at $\lambda - u > 0$. Momenterne kan beregnes direkte, men udnyttes den moment-genererende funktion fås:

$$\langle T \rangle = G'(0) = \left.\frac{\lambda}{(\lambda-u)^2}\right|_{u=0} = \underline{\lambda^{-1}}$$

$$\langle T^2 \rangle = G''(0) = \left.\frac{2\lambda}{(\lambda-u)^3}\right|_{u=0} = 2\lambda^{-2}$$

og dermed

$$\sigma^2 = \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2 = 2\lambda^{-2} - \lambda^{-2} = \underline{\lambda^{-2}}$$

Opgave 19

a) Sandsynligheden for at slå 1 sekser i første kast er $P(X=1) = f(1) = \frac{1}{6}$. Sandsynligheden for først at slå 1 sekser i andet kast er lig sandsynligheden for 0 seksere i første kast, $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, gange sandsynligheden for en sekser i andet kast, eller $P(X=2) = f(2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$. Generelt er

$$\underline{f(x) = \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{x-1}} \qquad \text{hvor } x = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Fordelingsfunktionen er

$$\begin{aligned} F(x) &= f(1) + f(2) + \cdots + f(x) = \tfrac{1}{6}\Big[1 + \tfrac{5}{6} + \cdots + \left(\tfrac{5}{6}\right)^{x-1}\Big] \\ &= \tfrac{1}{6}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{5}{6}\right)^n - \Big\{\left(\tfrac{5}{6}\right)^x + \left(\tfrac{5}{6}\right)^{x+1} + \cdots\Big\}\Big] \\ &= \tfrac{1}{6}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{5}{6}\right)^n - \left(\tfrac{5}{6}\right)^x \sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{5}{6}\right)^n\Big] = \tfrac{1}{6}\Big[1 - \left(\tfrac{5}{6}\right)^x\Big]\frac{1}{1-\frac{5}{6}} \\ &= \underline{1 - \left(\tfrac{5}{6}\right)^x} \end{aligned}$$

og det ses umiddelbart, at $F(x) \to 1 - 0 = \underline{1}$ for $x \to \infty$. Desuden fås:

$$P(3 < X \leq 9) = F(9) - F(3) = 1 - \left(\tfrac{5}{6}\right)^9 - 1 + \left(\tfrac{5}{6}\right)^3 = \underline{0.385}$$

b) Den moment-genererende funktion er:

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{x=1}^{\infty} \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{x-1} e^{xt} = \frac{e^t}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{5}{6}\,e^t\right)^n \\ &= \frac{e^t}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}\,e^t} = \underline{\frac{e^t}{6 - 5\,e^t}} \qquad (\text{for } 5e^t < 6) \end{aligned}$$

De afledede er

$$\begin{aligned} G'(t) &= \frac{e^t}{6 - 5\,e^t} - \frac{e^t(-5e^t)}{(6-5\,e^t)^2} = \frac{6e^t}{(6-5\,e^t)^2} \\ G''(t) &= \frac{6e^t}{(6-5\,e^t)^2} - \frac{12e^t(-5e^t)}{(6-5\,e^t)^3} = \frac{(6+5e^t)6e^t}{(6-5\,e^t)^3} \end{aligned}$$

og dermed

$$\mu = \langle X \rangle = G'(0) = \underline{6} \quad ; \quad \sigma^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = G''(0) - \mu^2 = 66 - 36 = \underline{30}$$

Eksperimentet med at slå 4 seksere i højst tre kast med fire terninger, når man efter hvert kast beholder de seksere man har slået, kan ækvivaleres med et eksperiment, hvor man kaster hver af de fire terninger hver for sig. Sandsynligheden for at der er 1 sekser i højst tre kast er F(3) for hver af terningerne, dvs. den ønskede sandsynlighed er

$$P(4 \text{ seksere i } 3 \text{ kast}) = [F(3)]^4 = \Big[1 - \left(\tfrac{5}{6}\right)^3\Big]^4 = \left(\tfrac{91}{216}\right)^4 = \underline{0.0315}$$

Opgave 20

a) Der er 10 forskellige mulige udfald med lige stor sandsynlighed, dvs.:

$$f(x) = \underline{\frac{1}{10}} \qquad \text{for } x = 0,\, 1,\, 2, \cdots, 9$$

og 0 for alle andre x. Middelværdien svarende til denne frekvensfunktion er

$$\mu_x = \langle X \rangle = \sum_{x=0}^{9} x f(x) = \underline{4.5}$$

og idet $\sum_{x=0}^{9} x^2 = 285$ fås

$$\sigma_x^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \frac{285}{10} - 4.5^2 = 8.25 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = \underline{2.872}$$

Tælles antal udfald, hvor $y(n) = 0$, $y(n) = 1, \cdots, y(n) = n$ og divideres med antallet af mulige udfald 10^n fås:

$$P(Y(1) \le 1) = (1+1) \cdot 10^{-1} = \underline{0.2}$$
$$P(Y(2) \le 2) = (1+2+3) \cdot 10^{-2} = \underline{0.06}$$
$$P(Y(3) \le 3) = (1+3+6+10) \cdot 10^{-3} = \underline{0.02}$$

b) X_i er statistisk uafhængige, og ifølge teorem 1 og 3 i §22.9 (§23.8 i 7.ed.) gælder derfor generelt

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_x = n\mu_x = \underline{4.5\,n} \quad ; \quad \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_x^2 = n\sigma_x^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_n = \underline{2.872\sqrt{n}}$$

Når $n \gg 1$ kan vi benytte "The central limit theorem" i §23.3 (§24.6 i 7.ed.), og dermed at fordelingen er normal med middelværdi μ_n og standardafvigelse σ_n eller

$$f_n(y) = \underline{\frac{1}{\sqrt{16.5n\pi}} \exp\left[-\tfrac{(y-4.5n)^2}{16.5n}\right]}$$

At finde 95% konfidensintervallet svarer til at bestemme k således, at

$$P(\mu_n - k \le Y(n) \le \mu_n + k) = P\Big(-\tfrac{k}{\sigma_n} \le \tfrac{Y(n)-\mu_n}{\sigma_n} \le \tfrac{k}{\sigma_n}\Big) = 2\Phi\Big(\tfrac{k}{\sigma_n}\Big) - 1 = 0.95$$

og dermed, ifølge tabel A7–A8, at $k = 1.96\sigma_n$.

Når $n = 1000$ er $\mu_n = 4500$ og $k = 1.96\sqrt{8250} = 178$, og dermed bliver konfidensintervallet

$$\underline{\mathrm{CONF}\{4322 \le y(1000) \le 4678\}}$$

Opgave 21

a)

j	x_j	$x_j - \overline{x}$	$(x_j - \overline{x})^2$
1	11.3	1.1	1.21
2	9.2	−1.0	1.00
3	12.1	1.9	3.61
4	8.5	−1.7	2.89
5	9.9	−0.3	0.09
$\sum$	51.0	0.0	8.80

Fra tabellen fås, idet $n = 5$, $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{51.0}{5} = \underline{10.2}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2 = \frac{8.8}{4} \quad \Rightarrow \quad s = \underline{1.48}$$

90% konfidensintervallet for μ er bestemt ud fra Student's t-fordelingen med $n - 1 = 4$ frihedsgrader og $\gamma = 0.9$, dvs.: $F(c) = \frac{1}{2}(1+\gamma) = 0.95 \Rightarrow c = 2.13$ (tabel A9 i 8. og A10 i 7. udgave) og dermed $k = sc/\sqrt{n} = 1.41$. Resultatet er, ifølge Table 23.2 i 8. udgave af Kreyszig (Table 24.6 i 7. udgave):

$$\mathrm{CONF}\{\overline{x} - k < \mu < \overline{x} + k\} = \underline{\mathrm{CONF}\{8.79 < \mu < 11.61\}}$$

b)

x-interval	b_j	z-interval	e_j	$\frac{(b_j-e_j)^2}{e_j}$
$x < 7$	7	$-\infty < z < -1.5$	6.68	0.015
$7 < x < 8$	11	$-1.5 < z < -1.0$	9.19	0.356
$8 < x < 9$	10	$-1.0 < z < -0.5$	14.98	1.656
$9 < x < 10$	22	$-0.5 < z < 0.0$	19.15	0.424
$10 < x < 11$	19	$0.0 < z < 0.5$	19.15	0.001
$11 < x < 12$	16	$0.5 < z < 1.0$	14.98	0.069
$12 < x < 13$	8	$1.0 < z < 1.5$	9.19	0.154
$13 < x$	7	$1.5 < z < \infty$	6.68	0.015

b_j er antallet af målepunkter i de forskellige x-intervaller, $\sum b_j = n = 100$. Næste søjle viser de tilsvarende intervaller af $z = (x-\mu)/\sigma$, med $\mu = 10.0$ og $\sigma = 2.0$. Fjerde søjle er de udregnede værdier af $e_j = n[\Phi(z_2) - \Phi(z_1)]$, hvor z_1 og z_2 er intervalendepunkterne, og $\Phi(z)$ er den standardiserede normalfordeling opstillet i tabel A7. Antallet af intervaller er $K = 8$ og fra sidste søjle fås:

$$\chi_0^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j} = 2.69$$

Dette resultat skal sammenlignes med χ^2-fordelingen med $K - r - 1 = 5$ frihedsgrader. To frihedsgrader, $r = 2$, er udnyttet ved at antage $\mu = \overline{x} = 10$ og $\sigma = s = 2$. Ifølge Table 23.7 (24.10 i 7. udgave) kan hypotesen om at X er normalfordelt accepteres, hvis $\chi_0^2 \le c$, hvor c er løsningen til ligningen $P(\chi^2 \le c) = 1 - \alpha = 0.95$. Fra tabel A10 (A11 i 7. udgave) fås, at $\underline{c = 11.07 > \chi_0^2 = 2.69}$, og dermed at <u>hypotesen kan accepteres.</u>

Opgave 22

a) De første fire søjler i følgende tabel opstilles:

	x	y	x^2	xy	$\overline{y}$	$\overline{y}-y$
	1	0.42	1	0.42	0.494	0.074
	2	0.98	4	1.96	0.981	0.001
	3	1.58	9	4.74	1.467	−0.113
	4	1.92	16	7.68	1.953	0.033
	5	2.36	25	11.80	2.440	0.080
	6	3.03	36	18.18	2.926	−0.104
	7	3.44	49	24.08	3.413	−0.027
	8	3.91	64	31.28	3.899	−0.011
	9	4.35	81	39.15	4.385	0.035
	10	4.84	100	48.40	4.872	0.032
$\sum$	55	26.83	385	187.69	26.830	0.000

Benyttes ligning (7.4) i "Supplement til Kreyszig" fås fra tabellen, idet $n = 10$ og $D = n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 = 825$,

$$k_0 = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{D} = \underline{\ 0.008\ }$$
$$k_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{D} = \underline{\ 0.486\ }$$

b) De to sidste søjler i tabellen er udfyldt ved at benytte $\overline{y}_i = k_0 + k_1 x_i = 0.0080 + 0.4864\, x_i$, hvorefter (7.6)–(7.8) i supplementet giver:

$$s^2(y) = \frac{1}{n-2}\sum(\overline{y}_i - y_i)^2 = \frac{0.03965}{8} = 0.00496 \quad ; \quad s(y) = 0.070$$
$$s^2(k_0) = \frac{\sum x_i^2}{D} s^2(y) = 0.00231 \quad ; \quad s(k_0) = \underline{\ 0.048\ }$$
$$s^2(k_1) = \frac{n}{D} s^2(y) = 0.0000601 \quad ; \quad s(k_1) = \underline{\ 0.0078\ }$$

95% konfidensintervallet for κ_1, og dermed også for κ_0 og $\overline{\mu}$, er bestemt af Student's t-fordelingen med $n-2 = 8$ frihedsgrader og $\gamma = 0.95$, dvs.: $F(c) = \frac{1}{2}(1+\gamma) = 0.975 \Rightarrow c = 2.31$ (tabel A9 i 8. og A10 i 7. udgave). Ifølge tabel 23.12 (24.13 i 7. udgave) og sidste paragraf i supplementet:

$$\mathrm{CONF}\{\, k_0 - cs(k_0) < \kappa_0 < k_0 + cs(k_0)\} = \underline{\mathrm{CONF}\{-0.10 < \kappa_0 < 0.12\}}$$
$$\mathrm{CONF}\{\, k_1 - cs(k_1) < \kappa_1 < k_1 + cs(k_1)\} = \underline{\mathrm{CONF}\{\, 0.468 < \kappa_1 < 0.504\}}$$
$$\mathrm{CONF}\{\, \langle y\rangle - cs(\langle y\rangle) < \overline{\mu} < \langle y\rangle + cs(\langle y\rangle)\} = \underline{\mathrm{CONF}\{\, 2.63 < \overline{\mu} < 2.73\}}$$

I sidste linie er $\langle y\rangle = \sum y_i/n = 2.683$ med standardafvigelsen $s(\langle y\rangle) = s(y)/\sqrt{10} = 0.022$.
Ifølge hypotesen er $\kappa_0 = 0$, $\kappa_1 = 0.5$, og $\overline{\mu} = \sum \mu(x)/n = \sum 0.5x_i/10 = 2.75$. Værdierne af κ_0 og κ_1 tilhører 95% konfidensintervallerne, men $\overline{\mu} = 2.75$ ligger uden for 95% konfidensintervallet for $\overline{\mu}$. Benyttes det hertil svarende signifikans-niveau på 5% er svaret ja til at <u>hypotesen kan afvises.</u>

Opgave 23

a) Idet $\log a + \log b = \log(ab)$ og $\log 10 = 1$ fås

$$F(x) = f(1) + f(2) + \cdots + f(k) = [\log 2 - \log 1] + \cdots + [\log(k+1) - \log k]$$
$$= \log \frac{2 \cdot 3 \cdots (k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \underline{\log(k+1)} \qquad ; \quad k \le x < k+1$$
$$F(x) = \underline{0} \text{ for } x < 1 \qquad ; \qquad F(x) = F(9) = \log 10 = \underline{1} \text{ for } x \ge 9.$$

Sandsynligheden for at første ciffer er lige er

$$P(k \text{ lige}) = f(2) + f(4) + f(6) + f(8) = \log 3 - \log 2 + \log 5 - \log 4 + \cdots$$
$$= \log \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} = \underline{0.3911}$$

Middelværdien er, idet $x \log k = \log k^x$,

$$\mu = \langle x \rangle = \sum_{k=1}^{9} k f(k) = 1[\log 2 - \log 1] + 2[\log 3 - \log 2] + \cdots$$
$$= \log \frac{2^1 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \cdot 5^4 \cdot 6^5 \cdot 7^6 \cdot 8^7 \cdot 9^8 \cdot 10^9}{1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5 \cdot 6^6 \cdot 7^7 \cdot 8^8 \cdot 9^9} = \log \frac{10^9}{9!} = \underline{3.4402}$$

b)

k	b_k	e_k	$\frac{(b_k - e_k)^2}{e_k}$
1	309	301.03	0.211
2	171	176.09	0.147
3	127	124.94	0.034
4	87	96.91	1.013
5	83	79.18	0.184
6	67	66.95	0.000
7	44	57.99	3.375
8	68	51.15	5.551
9	44	45.76	0.068

b_k er antallet af tal der har k som første ciffer, $\sum b_k = n = 1000$. Næste søjle er de udregnede værdier forudsagt af Benford fordelingen: $e_k = nf(k) = 1000 \log[(k+1)/k]$. Antallet af intervaller er $K = 9$ og fra sidste søjle fås:

$$\chi_0^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j} = 10.58$$

Dette resultat skal sammenlignes med χ^2-fordelingen med $K - r - 1 = 8$ frihedsgrader. $r = 0$, da Benford fordelingen er fastlagt på forhånd uden brug af stikprøven. Hypotesen er, at tallene i stikprøven har en fordeling som er i overensstemmelse med Benford fordelingen. Ifølge Table 23.7 (24.10 i 7. udgave) kan hypotesen accepteres, hvis $\chi_0^2 \le c$, hvor c er løsningen til ligningen $P(\chi^2 \le c) = 1 - \alpha = 0.95$. Fra tabel A10 (A11 i 7. udgave) fås, at $\underline{c = 15.51 > \chi_0^2 = 10.58}$, og dermed: <u>hypotesen kan ikke afvises.</u>

Opgave 24

a) Frekvensfunktionen for Poisson fordelingen er $f(x) = \dfrac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}$, hvor μ er middelværdien. Udnyttes det at X og Y er statistisk uafhængige fås

$$\begin{aligned} P(Z=3) &= \sum_{x=0}^{3} P(X=x \cap Y=3-x) = \sum_{x=0}^{3} P(X=x)P(Y=3-x) \\ &= \sum_{x=0}^{3} \frac{2^x}{x!}e^{-2}\frac{3^{3-x}}{(3-x)!}e^{-3} = e^{-5}\Big(1\cdot\frac{3^3}{3!} + \frac{2}{1}\cdot\frac{3^2}{2!} + \frac{2^2}{2!}\cdot\frac{3}{1} + \frac{2^3}{3!}\cdot 1\Big) \\ &= 20.8333\, e^{-5} = \underline{0.1404} \end{aligned}$$

For Poisson fordelingen er variansen lig med middelværdien, og benyttes teorem 1 og 3 i §22.9 fås:

$$\begin{aligned} \mu &= \langle Z\rangle = \langle X+Y\rangle = \langle X\rangle + \langle Y\rangle = \underline{\mu_1+\mu_2} \\ \sigma^2 &= \langle Z^2\rangle - \langle Z\rangle^2 = \sigma^2(x) + \sigma^2(y) = \underline{\mu_1+\mu_2} \end{aligned}$$

Z's fordeling tilnærmes med normalfordelingen med $\mu = 5$ og $\sigma = \sqrt{5}$ og

$$\begin{aligned} P(Z=3) &\simeq \Phi\Big(\frac{3+0.5-5}{\sqrt{5}}\Big) - \Phi\Big(\frac{3-0.5-5}{\sqrt{5}}\Big) \\ &= \Phi(-0.671) - \Phi(-1.118) = 1 - 0.7489 - 1 + 0.8682 = \underline{0.1193} \end{aligned}$$

ved brug af lineær interpolation i tabel A7.

b) Ligningen $xy = 3$ har kun de (ikke-negative) heltallige løsningerne $(x,y) = (1,3)$ og (3,1). Det betyder, at nu er

$$P(Z=3) = P(X=1)P(Y=3) + P(X=3)P(Y=1) = \underline{0.0876}$$

I det generelle tilfælde fås (se også teorem 2 i §22.9):

$$\mu = \langle Z\rangle = \langle XY\rangle = \langle X\rangle\langle Y\rangle = \underline{\mu_1\mu_2}$$

Benyttes $\langle X^2\rangle = \sigma^2(x) + \langle X\rangle^2 = \mu_1 + \mu_1^2$ og tilsvarende for $\langle Y^2\rangle$ fås:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle Z^2\rangle - \langle Z\rangle^2 = \langle X^2Y^2\rangle - \mu_1^2\mu_2^2 = \langle X^2\rangle\langle Y^2\rangle - \mu_1^2\mu_2^2 \\ &= (\mu_1+\mu_1^2)(\mu_2+\mu_2^2) - \mu_1^2\mu_2^2 = \underline{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2+1)} \end{aligned}$$

Dvs., at i det betragtede tilfælde er $\mu = 6$ og $\sigma = \sqrt{2\cdot 3(2+3+1)} = 6$ og

$$P(Z=3) \simeq \Phi\Big(\frac{3+0.5-6}{6}\Big) - \Phi\Big(\frac{3-0.5-6}{6}\Big) = 0.7201 - 0.6616 = \underline{0.0585}$$

Alle resultater under a) er i overensstemmelse med at $Z = X+Y$ har Poisson fordelingen med $\mu = \mu_1 + \mu_2$, idet $P(Z=3) = \dfrac{5^3}{3!}e^{-5}$. Dette forekommer intuitivt rigtigt og kan let eftervises generelt vha. moment-genererende funktioner. I tilfældet $Z = XY$ er $\mu \neq \sigma^2$, og Z har **ikke** en Poisson fordeling. $\mu = 5$ er på grænsen af hvor normalfordelingstilnærmelsen kan benyttes (især ude i halerne) og den relative fejl er 15% i a). μ er større i b) men den relative fejl er ca. to gange større i dette tilfælde (fordelingen er meget langt fra at være normal).

Opgave 25

a) I følge Supplementet (6.5) har Y en $\underline{\text{normalfordeling}}$ og

$$\langle Y \rangle = \langle \overline{X}_1 \rangle - \langle \overline{X}_2 \rangle = \underline{\mu_1 - \mu_2}$$

(teorem 1 i §22.9). $\overline{X}_1$ og $\overline{X}_2$ er uafhængige stokastiske variable med varianserne $\sigma^2(\overline{x}_1) = \sigma^2/n_1$ og $\sigma^2(\overline{x}_2) = \sigma^2/n_2$, hvilket medfører

$$\sigma^2(y) = \sigma^2(\overline{x}_1) + \sigma^2(\overline{x}_2) = \underline{\sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

(teorem 2 i §22.9). Ifølge teorem 2 i §23.3 [tabel 23.2 eller Supplementet (5.26)] er konfidensintervallerne givet ved

$$\text{CONF}_\gamma \left\{ \overline{x}_\alpha - \frac{c_\alpha s_\alpha}{\sqrt{n_\alpha}} \leq \mu_\alpha \leq \overline{x}_\alpha + \frac{c_\alpha s_\alpha}{\sqrt{n_\alpha}} \right\}$$

og $F_t(c_\alpha) = (1+\gamma)/2$, hvor F_t er Student's t-fordelingen med $n_\alpha - 1$ frihedsgrader. Idet $(1+\gamma)/2 = 0.975$ er $c_1 = 2.78$ og $c_2 = 2.26$ ifl. tabel A9 og dermed

$$\underline{\text{CONF}_\gamma\{65.96 \leq \mu_1 \leq 78.64\}} \quad ; \qquad \underline{\text{CONF}_\gamma\{63.38 \leq \mu_2 \leq 68.82\}}$$

b) Idet $P(-c \leq T \leq c) = F_t(c) - F_t(-c) = 2F_t(c) - 1 = \gamma = 0.95$, hvor F_t er Student's t-fordelingen med $n_1 + n_2 - 2 = 13$ frihedsgrader fås fra tabel A9, at $c = 2.16$. Stikprøvens resultat for T er:

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \cdot \frac{\sigma}{s_y}, \quad \text{og} \qquad \text{CONF}_\gamma\{-c \leq t \leq c\}$$

Benyttes $s_y^2 = (4s_1^2 + 9s_2^2)/13 = 18.0$ og indsættes tallene i udtrykkene ovenfor fås, at 95% konfidensintervallet for $\langle Y \rangle = \mu_1 - \mu_2$ bliver

$$\underline{\text{CONF}_\gamma\{1.18 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 11.22\}}$$

Med et signifikans niveau $\alpha = 1 - \gamma = 0.05$ er $\mu_1 - \mu_2 \geq 1.18$, hvilket betyder, at $\underline{\text{hypotesen } \mu_1 = \mu_2 \text{ kan afvises}}$. Bemærk, at det ret store overlap mellem de to konfidensintervaller i a), fra 65.96 til 68.82, kunne forlede til den modsatte konklusion. Ifølge definitionen i (3) er

$$(n_1 + n_2 - 2)S_y^2/\sigma^2 = (n_1 - 1)S_1^2/\sigma^2 + (n_2 - 1)S_2^2/\sigma^2$$

De to led på højre side er stokastiske uafhængige størrelser, der har en χ^2 fordeling med henholdsvis $n_1 - 1$ og $n_2 - 1$ frihedsgrader [teorem 3 i §23.3, Supplementet (5.13)]. Det betyder at $(n_1 + n_2 - 2)S_y^2/\sigma^2$ har en $\underline{\chi^2 \text{ fordeling}}$ med $n_1 - 1 + n_2 - 1 = \underline{n_1 + n_2 - 2 \text{ frihedsgrader}}$.

Opgave 26

a) De første fire søjler i følgende tabel opstilles:

	x	y	x^2	xy	$\overline{y}$	$\overline{y}-y$	$\overline{y}$	$\overline{y}-y$
	1	0	1	0	−1.905	−1.905	0.000	0.000
	2	1	4	2	1.324	0.324	0.943	−0.057
	3	3	9	9	4.552	1.552	3.029	0.029
	4	6	16	24	7.781	1.781	6.257	0.257
	5	11	25	55	11.010	0.010	10.629	−0.371
	6	16	36	96	14.238	−1.762	16.143	0.143
$\sum$	21	37	91	186	37.000	0.000	37.001	0.001

Benyttes ligning (7.4) i "Supplement til Kreyszig" og indsættes tabelværdierne og $n = 6$ fås $D = n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 = 105$ og

$$k_0 = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{D} = -5.133$$

$$k_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{D} = 3.229 \qquad \text{eller} \qquad \overline{y} = \underline{-5.133 + 3.229\,x}$$

Femte og sjette søjle i tabellen er udfyldt ved at benytte $\overline{y}_i = k_0 + k_1 x_i = -5.133 + 3.229\,x_i$. Fra ligning (7.6) i supplementet fås

$$s^2(y) = \frac{1}{n-2}\sum(\overline{y}_i - y_i)^2 = \frac{12.419}{4} = 3.105 \qquad ; \qquad s(y) = \underline{1.762}$$

b) De to sidste søjler i tabellen er udfyldt ved at benytte resultatet af den kvadratiske regressionskurve: $\overline{y}_i = (7 - 27\,x + 20\,x^2)/35$. Denne regressionskurve har 3 frie parametre og $n-2$ i (7.6) erstattes af $n-3$ og

$$s^2(y) = \frac{1}{n-3}\sum(\overline{y}_i - y_i)^2 = \frac{0.2282}{3} = 0.0761 \qquad ; \qquad s(y) = 0.276$$

95% konfidensintervallet for $\sigma(y)$ bestemmes af χ^2-fordelingen med $n-2$ frihedsgrader i det lineære og $n-3$ frihedsgrader i det kvadratiske tilfælde. Table A10 viser, at $F(c_1) = (1-\gamma)/2 = 0.025 \Rightarrow c_1 = 0.48$ og $F(c_2) = (1+\gamma)/2 = 0.975 \Rightarrow c_2 = 11.14$, med 4 frihedsgrader og $\gamma = 0.95$. Benyttes (5.15) i supplementet (med $n-1$ erstattet med $n-2$) fås i det lineære tilfælde:

$$\mathrm{CONF}_\gamma\Big\{\frac{n-2}{c_2}\,s^2(y) < \sigma^2(y) < \frac{n-2}{c_1}\,s^2(y)\Big\} \Rightarrow \underline{\mathrm{CONF}_\gamma\{1.06 < \sigma(y) < 5.09\}}$$

Benyttes den kvadratiske regressionskurve er $c_1 = 0.22$ og $c_2 = 9.35$ (3 frihedsgrader) og dermed

$$\mathrm{CONF}_\gamma\Big\{\frac{n-3}{c_2}\,s^2(y) < \sigma^2(y) < \frac{n-3}{c_1}\,s^2(y)\Big\} \Rightarrow \underline{\mathrm{CONF}_\gamma\{0.16 < \sigma(y) < 1.02\}}$$

De to konfidensintervaller overlapper ikke, dvs. de to hypoteser forudsiger signifikant forskellige værdier for $\sigma(y)$ $\Rightarrow$ <u>hypotesen, at regressionskurven er lineær, kan afvises.</u> Hvis regressionskurven er lineær vil en antagelse om et ekstra kvadratisk led ikke resultere i en signifikant mindre værdi for $\sigma(y)$. Omvendt, er regressionskurven kvadratisk, så vil antagelsen af en lineær kurve give et fejlbidrag til $s(y)$ og dermed resultere i en større værdi for $\sigma(y)$.

Opgave 27

a) De kovariante basisvektorer er givet ved, (19.50) eller (19.53): $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$, dvs.

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \underline{(-2\sin\theta, \cos\theta, 0)} \quad , \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \underline{(0,0,1)}$$

Heraf bestemmes den metriske tensors kovariante komponenter

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \underline{\begin{pmatrix} 4\sin^2\theta + \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) Ifølge (19.63) er $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$ (g^{ij}-matricen er den inverse til g_{ij}-matricen):

$$g^{ij} = \underline{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{4\sin^2\theta + \cos^2\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

De kontravariante komponenter g^{ij} kan benyttes til at bestemme de kontravariante basisvektorer, $\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j$ (nederst side 707):

$$\mathbf{e}^1 = g^{11}\mathbf{e}_1 = \underline{\frac{(-2\sin\theta, \cos\theta, 0)}{4\sin^2\theta + \cos^2\theta}} \quad , \quad \mathbf{e}^2 = g^{22}\mathbf{e}_2 = \underline{(0,0,1)}$$

Christoffel symbolet af anden art er defineret, (19.74), $\Gamma^k_{ij} = \mathbf{e}^k \cdot \dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u^j}$:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{(-2\sin\theta, \cos\theta, 0)}{4\sin^2\theta + \cos^2\theta} \cdot (-2\cos\theta, -\sin\theta, 0) = \underline{\frac{3\sin\theta\cos\theta}{4\sin^2\theta + \cos^2\theta}}$$

og alle de andre 7 komponenter er 0.

c) $\mathbf{r}$'s kontravariante komponenter er:

$$r^1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}^1 = \frac{-3\sin\theta\cos\theta}{4\sin^2\theta + \cos^2\theta} \quad , \quad r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}^2 = z$$

og dermed

$$\frac{\partial r^1}{\partial \theta} = \frac{12\sin^4\theta - 3\cos^4\theta + 9\sin^2\theta\cos^2\theta}{(4\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2} \quad , \quad \frac{\partial r^2}{\partial z} = 1$$

Indsættes fås

$$r^i_{;i} = \frac{\partial r^1}{\partial \theta} + \frac{\partial r^2}{\partial z} + \Gamma^1_{11} r^1 = \underline{1 + \frac{12\sin^4\theta - 3\cos^4\theta}{(4\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2}} = 2 - \frac{4}{(3\sin^2\theta + 1)^2}$$

Opgave 28

a) De kovariante basisvektorer er givet ved (19.50) eller (19.53): $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$, dvs.

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = \underline{(-\alpha, \beta, 0)} \quad ; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = \underline{(\beta, \alpha, 0)} \quad ; \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma} = \underline{(0, 0, -1)}$$

Heraf bestemmes den metriske tensors kovariante komponenter

$$\left\{g_{ij}\right\} = \left\{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j\right\} = \underline{\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2+\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad \text{og} \quad \sqrt{g} = \underline{\alpha^2+\beta^2}$$

Ifølge (19.63) er $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$ (g^{ij}-matricen er den inverse til g_{ij}-matricen):

$$\left\{g^{ij}\right\} = \left\{g_{ij}\right\}^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) Indsættes x, y, z i funktionsudtrykket fås: $f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2)^2 + \gamma^2$, og dermed

$$v_1 = \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \underline{\alpha(\alpha^2+\beta^2)} \quad ; \quad v_2 = \frac{\partial f}{\partial \beta} = \underline{\beta(\alpha^2+\beta^2)} \quad ; \quad v_3 = \frac{\partial f}{\partial \gamma} = \underline{2\gamma}$$
$$v^1 = g^{1j} v_j = \underline{\alpha} \quad ; \quad v^2 = g^{2j} v_j = \underline{\beta} \quad ; \quad v^3 = g^{3j} v_j = \underline{2\gamma}$$

Det indre produkt af $\mathbf{v}$ med sig selv er

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1 v^1 + v_2 v^2 + v_3 v^3 = \underline{(\alpha^2+\beta^2)^2 + 4\gamma^2} = 4f(\alpha, \beta, \gamma)$$

og ifølge (19.95) er $\quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{g}\, v^i\right)$

$$= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{(\alpha^2+\beta^2)\alpha\right\} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left\{(\alpha^2+\beta^2)\beta\right\} + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left\{(\alpha^2+\beta^2)2\gamma\right\}\right]$$
$$= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[3\alpha^2+\beta^2+3\beta^2+\alpha^2+2(\alpha^2+\beta^2)\right] = \underline{6}$$

Benyttes det kartesianske koordinatsystem fås:

$$\mathbf{v} = \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2(x, y, z) \quad , \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 4(x^2+y^2+z^2) \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 2+2+2 = 6$$

som er de samme resultater som ovenfor. Dette er i overensstemmelse med at $\mathbf{v}$ er en 1. ordens tensor og dermed at kontraktionerne $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ og $\nabla \cdot \mathbf{v}$ er skalare størrelser, der er uafhængige af koordinattransformationen.

Opgave 29

a) De kovariante basisvektorer er givet ved (19.50) eller (19.53), $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = \underline{(\beta, 1)} \qquad ; \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = \underline{(\alpha, 1)}$$

Heraf bestemmes den metriske tensors kovariante komponenter

$$\{g_{ij}\} = \{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j\} = \underline{\begin{pmatrix} 1+\beta^2 & 1+\alpha\beta \\ 1+\alpha\beta & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}}$$

Indføres $\mathbf{e}^1 = (c_1, c_2)$ giver ortogonalitetsbetingelserne de to ligninger:

(1) $\beta c_1 + c_2 = 1$ og (2) $\alpha c_1 + c_2 = 0$.

og benyttes samme fremgangsmåde for $\mathbf{e}^2$ fås løsningerne:

$$\mathbf{e}^1 = \underline{\frac{1}{\alpha-\beta}(-1, \alpha)} \qquad ; \qquad \mathbf{e}^2 = \underline{\frac{1}{\alpha-\beta}(1, -\beta)}$$

De eneste afledede af de kovariante basisvektorer, der ikke er 0, er:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \beta} = (1,0) \qquad ; \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial u^1} = \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \alpha} = (1,0)$$

Christoffel symbolet af anden art er defineret, (19.74), $\Gamma^k_{ij} = \mathbf{e}^k \cdot \dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u^j}$, og

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \mathbf{e}^1 \cdot (1,0) = \underline{-\frac{1}{\alpha-\beta}} \quad ; \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \mathbf{e}^2 \cdot (1,0) = \underline{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

og de resterende fire: $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{22} = \underline{0}$.

b) De kontravariante komponenter af $\mathbf{r} = r^1\mathbf{e}_1 + r^2\mathbf{e}_2$ er

$$r^1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}^1 = \frac{1}{\alpha-\beta}[-\alpha\beta + \alpha(\alpha+\beta)] = \frac{\alpha^2}{\alpha-\beta} \quad ; \quad r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}^2 = \frac{-\beta^2}{\alpha-\beta}$$

og dermed fås:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{r} &= \left(\frac{2\alpha}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)^2}\right) + \left(\frac{-2\beta}{\alpha-\beta} - \frac{\beta^2}{(\alpha-\beta)^2}\right) + \Gamma^1_{21} r^2 + \Gamma^2_{12} r^1 \\ &= 2 - \frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha-\beta)^2} + \frac{-\beta^2}{\alpha-\beta} \cdot \frac{-1}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha^2}{\alpha-\beta} \cdot \frac{1}{\alpha-\beta} = \underline{2} \end{aligned}$$

Benyttes $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2$ fås $a^1 = (1,1)\cdot\mathbf{e}^1 = \dfrac{\alpha-1}{\alpha-\beta}$ og $a^2 = (1,1)\cdot\mathbf{e}^2 = \dfrac{1-\beta}{\alpha-\beta}$ og $\mathbf{T}$'s kontravariante komponenter er givet ved:

$$\{T^{ij}\} = \begin{pmatrix} a^1 r^1 & a^1 r^2 \\ a^2 r^1 & a^2 r^2 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \begin{pmatrix} \alpha^2(\alpha-1) & -\beta^2(\alpha-1) \\ \alpha^2(1-\beta) & -\beta^2(1-\beta) \end{pmatrix}}$$

Opgave 30

a) De kovariante basisvektorer er givet ved (19.50) eller (19.53) $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \underline{a \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}} \qquad ; \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \underline{a \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Heraf bestemmes den metriske tensors kovariante komponenter

$$\left\{g_{ij}\right\} = \left\{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j\right\} = \underline{\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\theta \end{pmatrix}}$$

Basisvektorerne skal opfylde ortonormeringsbetingelsen $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$ og det ses uden videre at udtrykkene for $\mathbf{e}^1$ og $\mathbf{e}^2$ medfører at $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ og $\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$. Desuden gælder generelt at $g = |g_{ij}| = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^2$ og dermed at $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$ og $\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$. Det vil sige at alle fire relationer er opfyldt. De kontravariante basisvektorer er

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_1}{a^2} = \underline{\frac{1}{a}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}} \quad ; \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_2}{a^2\sin^2\theta} = \underline{\frac{1}{a\sin\theta}\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}}$$

b) De afledede af de kovariante basisvektorer er $\dfrac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial u^1} = -a\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$;

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial u^1} = -a\begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi \\ -\cos\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial u^2} = -a\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Christoffel symbolerne af 2. art er defineret $\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\} = \mathbf{e}^k \dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u^j}$ og

$$\left\{ {1 \atop 22} \right\} = \underline{-\sin\theta\cos\theta} \qquad ; \qquad \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \underline{\cot\theta}$$

mens de resterende fem komponenter er $\underline{0}$.

En direkte udregning viser at

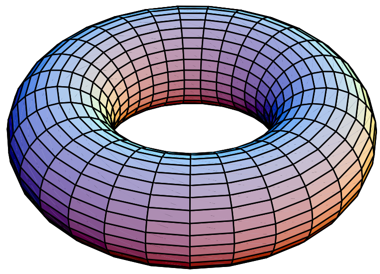
$$R_{11} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{ {2 \atop 12} \right\} - 0 + \left\{ {2 \atop 21} \right\}\left\{ {2 \atop 21} \right\} - 0 = \frac{\partial \cot\theta}{\partial\theta} + \cot^2\theta = -1$$

og idet $g^{11} = 1/g_{11}$ og $g^{22} = 1/g_{22}$ fås

$$R = g^{ij}R_{ij} = \frac{1}{a^2}R_{11} + \frac{1}{a^2\sin^2\theta}R_{22} = \underline{-\frac{2}{a^2}}$$

Opgave 31

Ligningerne fremstiller overfladen af en torus (se figuren), hvis midterlinie er en cirkel med radius a liggende i xy-planet. Torus-rørets tværsnit er en cirkel med radius b, hvor $b = 0.4a$ på figuren.



a) De kovariante basisvektorer er givet ved (19.50) eller (19.53), $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \underline{b\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}} \quad ; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \underline{(a + b\sin\theta)\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Heraf bestemmes den metriske tensors kovariante komponenter, $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$,

$$\{g_{ij}\} = \underline{\begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a+b\sin\theta)^2 \end{pmatrix}} \quad \text{og} \quad \{g^{ij}\} = \underline{\begin{pmatrix} b^{-2} & 0 \\ 0 & (a+b\sin\theta)^{-2} \end{pmatrix}}$$

hvor de kontravariante komponenter er udregnet som den inverse matrix, $g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$ eller $\{g^{ij}\} = \{g_{ij}\}^{-1}$. De kontravariante basisvektorer er

$$\mathbf{e}^1 = g^{1j}\,\mathbf{e}_j = \underline{\frac{1}{b}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}} \quad ; \quad \mathbf{e}^2 = g^{2j}\,\mathbf{e}_j = \underline{\frac{1}{a + b\sin\theta}\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}}$$

b) En generalisering af (19.56) betyder at i to dimensioner er arealelementet $dA = \sqrt{g}\,du^1du^2$, hvor g er determinanten af $\{g_{ij}\} = b^2(a + b\sin\theta)^2$, og dermed

$$dA = \underline{b(a + b\sin\theta)d\theta d\phi}$$

og det totale overfladeareal

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(a + b\sin\theta)d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} 2\pi ab\, d\phi = \underline{4\pi^2 ab}$$

De kovariante komponenter af $\mathbf{T} = \mathbf{r}\otimes\mathbf{r}$ er $T_{ij} = r_i r_j$, hvor $r_i = \mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_i$. Idet $r_1 = ab\cos\theta$ og $r_2 = 0$ fås

$$T_{11} = r_1 r_1 = (ab)^2\cos^2\theta \qquad \text{og} \qquad T_{12} = T_{21} = T_{22} = 0$$

Ifølge øverst side 720 i noterne er komponenterne af den kovariante afledede:

$$T_{ij;k} = T_{ij,k} - \Gamma^l_{ik}T_{lj} - \Gamma^l_{jk}T_{il}$$

De to sidste led bidrager ikke når $k = 1$, og

$$T_{11;1} = T_{11,1} = \underline{-2(ab)^2\sin\theta\cos\theta}$$

hvorimod

$$T_{12;2} = T_{21;2} = -\Gamma^1_{22}T_{11} = \underline{(a + b\sin\theta)a^2b\cos^3\theta}$$

De resterende 5 komponenter af den kovariante afledede er $\underline{0}$.

Opgave 32

a) De kovariante basisvektorer i u-koordinatsystemet er, ifølge (19.57):

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\rho\sin\phi \\ \rho\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De kovariante komponenter af $\mathbf{S} = \mathbf{r} \otimes \mathbf{k}$ er $S_{ij} = r_i\, k_j = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_i)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_j)$, dvs.

$$\overline{\overline{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^1\cos\phi + x^2\sin\phi \\ 0 & 0 & -x^1\rho\sin\phi + x^2\rho\cos\phi \\ 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}}$$

Ved en simpel regning fås: $\quad \rho = \underline{r\sin\theta} \quad ; \quad \phi = \underline{\psi} \quad ; \quad z = \underline{r\cos\theta}$
og fra disse resultater:

$$\overline{\overline{U}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial r} & \frac{\partial\rho}{\partial\theta} & \frac{\partial\rho}{\partial\psi} \\ \frac{\partial\phi}{\partial r} & \frac{\partial\phi}{\partial\theta} & \frac{\partial\phi}{\partial\psi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\psi} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Benyttes ligning (1) i opgaveteksten fås:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{S}}' &= \overline{\overline{U}}^t\, \overline{\overline{S}}\, \overline{\overline{U}} \\ &= \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ r\cos\theta & 0 & -r\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & r\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r^2\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

De to transformationsligninger for 2. ordens tensorer er:

$$T'_{ij} = \frac{\partial u^k}{\partial v^i}\frac{\partial u^l}{\partial v^j}\, T_{kl} \qquad ; \qquad T'^{ij} = \frac{\partial v^i}{\partial u^k}\frac{\partial v^j}{\partial u^l}\, T^{kl}$$

Den første ligning omsat til matrix notation lyder

$$[\overline{\overline{T}}']_{ij} = \sum_{kl} [\overline{\overline{U}}]_{ki} [\overline{\overline{U}}]_{lj} [\overline{\overline{T}}]_{kl} = \sum_{kl} [\overline{\overline{U}}^t]_{ik} [\overline{\overline{T}}]_{kl} [\overline{\overline{U}}]_{lj} = [\overline{\overline{U}}^t\, \overline{\overline{T}}\, \overline{\overline{U}}]_{ij}$$

i overensstemmelse med (1). Indføres $[\overline{\overline{V}}]_{ij} = \dfrac{\partial v^i}{\partial u^j}$ fås i det anden tilfælde

$$[\overline{\overline{\mathfrak{T}}}']_{ij} = \sum_{kl} [\overline{\overline{V}}]_{ik} [\overline{\overline{V}}]_{jl} [\overline{\overline{\mathfrak{T}}}]_{kl} = \sum_{kl} [\overline{\overline{V}}]_{ik} [\overline{\overline{\mathfrak{T}}}]_{kl} [\overline{\overline{V}}^t]_{lj} = [\overline{\overline{V}}\, \overline{\overline{\mathfrak{T}}}\, \overline{\overline{V}}^t]_{ij}$$

igen i overensstemmelse med (1), hvor desuden

$$[\overline{\overline{U}}\,\overline{\overline{V}}]_{ij} = \sum_k [\overline{\overline{U}}]_{ik} [\overline{\overline{V}}]_{kj} = \sum_k \frac{\partial u^i}{\partial v^k}\frac{\partial v^k}{\partial u^j} = \frac{\partial u^i}{\partial u^j} = \delta_{ij}$$

og dermed $\overline{\overline{V}} = \overline{\overline{U}}^{-1}$.

Opgave 33

a) De kovariante basisvektorer er givet ved (19.50) eller (19.53), $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \underline{\begin{pmatrix} -\sin\theta - z\cos\theta \\ \cos\theta - z\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}} \quad ; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \underline{\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Heraf bestemmes den metriske tensors kovariante komponenter, $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$,

$$\{g_{ij}\} = \underline{\begin{pmatrix} 1+z^2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \quad \text{og} \quad g = |g_{ij}| = \underline{1+2z^2}$$

De kontravariante komponenter er bestemt ved den inverse matrix, idet $g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$ eller $\{g^{ij}\} = \{g_{ij}\}^{-1}$, dvs.

$$\{g^{ij}\} = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1+z^2 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{1+2z^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1+z^2 \end{pmatrix}}$$

b) Relationen $g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j \Rightarrow g^{ik}g_{ki} = g^{ik}g_{ik} = \delta^i_i = 2$ (sporet af den todimensionale enhedsmatrix), hvormed fås

$$R = R(z) = g_{ij}R^{ij} = g_{ij}\frac{g^{ij}}{g^2} = \frac{2}{g^2} = \underline{\frac{2}{(1+2z^2)^2}}$$

Fladens krumning afhænger kun af z, og

$$K = -\frac{R}{2} = -\frac{1}{(1+2z^2)^2} \to \underline{0} \text{ for } z \to \pm\infty$$

Benyttes udtrykket øverst side 720 i noterne for de kovariante afledede af de kontravariante komponenter af en anden ordens tensor fås, at divergensen

$$R^{ij}_{;j} = R^{ij}_{,j} + \left\{ {i \atop lj} \right\} R^{lj} + \left\{ {j \atop lj} \right\} R^{il} = R^{ij}_{,j} + \frac{1}{g^2}\left(\left\{ {i \atop lj} \right\} g^{lj} + \left\{ {j \atop lj} \right\} g^{il} \right)$$

Den tilsvarende afledede af den metriske tensor $g^{ij}_{;j} = 0$, og dermed er

$$R^{ij}_{;j} = \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{g^{ij}}{g^2}\right) + \frac{1}{g^2}\left(-\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^j}\right) = g^{ij}\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{1}{g^2}\right)$$

Idet g kun afhænger af $u^2 = z$ fås at:

$$R^{1j}_{;j} = g^{12}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{g^2}\right) = \frac{-1}{1+2z^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{(1+2z^2)^2}\right) = \frac{8z}{(1+2z^2)^4}$$

$$R^{2j}_{;j} = g^{22}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{g^2}\right) = \frac{1+z^2}{1+2z^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{(1+2z^2)^2}\right) = \frac{-8z(1+z^2)}{(1+2z^2)^4}$$

og dermed at:

$$2\,g_{1i}R^{ij}_{;j} = 2\,g_{11}R^{1j}_{;j} + 2\,g_{12}R^{2j}_{;j} = 2(1+z^2)\frac{8z}{(1+2z^2)^4} + 2\cdot 1\frac{-8z(1+z^2)}{(1+2z^2)^4} = 0$$

$$2\,g_{2i}R^{ij}_{;j} = 2\cdot 1\frac{8z}{(1+2z^2)^4} + 2\cdot 2\frac{-8z(1+z^2)}{(1+2z^2)^4} = \frac{-16z}{(1+2z^2)^3} = R'(z)$$

og, idet $R_{;1} = R_{,1} = \partial R/\partial\theta = 0$ og $R_{;2} = R_{,2} = \partial R/\partial z = R'(z)$, er relationen i opgaveteksten eftervist.

Opgave 34

a) De kovariante basisvektorer er givet ved (19.50) eller (19.53), $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \underline{\begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad ; \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Heraf bestemmes den metriske tensors kovariante komponenter, $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$,

$$\{g_{ij}\} = \begin{pmatrix} a^2\sin^2 + b^2\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og dermed}$$
$$(ds)^2 = g_{ij}du^i du^j = \underline{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)(d\theta)^2 + (dz)^2}$$

Ifølge (1) er $f^2(\theta) = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$ og $dz = z'(\theta)d\theta = cI'(\theta)d\theta = cf(\theta)d\theta$ og dermed

$$(ds)^2 = f^2(\theta)(d\theta)^2 + [cf(\theta)d\theta]^2 = (1+c^2)f^2(\theta)(d\theta)^2 \;\Rightarrow$$
$$ds = \pm\sqrt{1+c^2}f(\theta)d\theta \;\Rightarrow s(\theta) = \pm\sqrt{1+c^2}I(\theta) \;\Rightarrow$$
$$s^2(\theta) = \underline{(1+c^2)I^2(\theta)} \qquad [s(\theta_0) = 0]$$

b) Idet $t \equiv \theta \;\Rightarrow\; du^1/dt = d\theta/d\theta = 1$ og $d^2u^1/dt^2 = 0$ bliver differentialligningerne for den geodætiske kurve:

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} \quad (i=1) \quad ; \qquad \frac{d^2z}{d\theta^2} = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}}\frac{dz}{d\theta} \quad (i=2)$$

Ifølge regningerne under punkt a) er

$$\dot{s} = \frac{ds}{d\theta} = \pm\sqrt{1+c^2}f(\theta) \;\Rightarrow \ddot{s} = \frac{d^2s}{d\theta^2} = \pm\sqrt{1+c^2}f'(\theta)$$

og dermed (der gælder samme fortegn i de to ligninger),

$$\frac{\ddot{s}}{\dot{s}} = \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \left\{ {1 \atop 11} \right\}$$

i overensstemmelse med differentialligningen i tilfældet $i = 1$. Ifølge (1) er $z(\theta) = z_0 + cI(\theta)$ som medfører at $z'(\theta) = cf(\theta)$ og $z''(\theta) = cf'(\theta)$, hvormed den anden differentialligning også er opfyldt.

I tilfældet $a = 2,\; b = 1$ er

$$z_1 = z(\theta_1) = z_0 + cI(\pi) = 0 + cI(\pi) = 1 \;\Rightarrow\; c = 1/I(\pi)$$

dvs.

$$s^2 = s^2(\theta_1) = (1+c^2)I^2(\pi) = I^2(\pi) + 1 = 4.844^2 + 1 \;\Rightarrow\; s = \underline{4.946}$$

Opgave 35

a) For en fastholdt værdi af ψ_0 beskriver $\mathbf{r}$ overfladen af en tredimensional kugle med centrum i $(0,0,0)$ og radius $A\sin\psi_0$ i det tredimensionale rum udspændt af de tre første koordinater: $x^2+y^2+z^2 = A^2\sin^2\psi_0$.

De kovariante basisvektorer er givet ved (19.50) eller (19.53), $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= A(-\sin\phi\sin\theta\sin\psi,\ \cos\phi\sin\theta\sin\psi,\ 0,\ 0)\\
\mathbf{e}_2 &= A(\cos\phi\cos\theta\sin\psi,\ \sin\phi\cos\theta\sin\psi,\ -\sin\theta\sin\psi,\ 0)\\
\mathbf{e}_3 &= \underline{A(\cos\phi\sin\theta\cos\psi,\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi,\ \cos\theta\cos\psi,\ -\sin\psi)}
\end{aligned}
$$

Heraf bestemmes den metriske tensors kovariante komponenter, $g_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j$,

$$
\underline{\{g_{ij}\} = \begin{pmatrix} A^2\sin^2\theta\sin^2\psi & 0 & 0\\ 0 & A^2\sin^2\psi & 0\\ 0 & 0 & A^2\end{pmatrix}}
$$

b) Det differentielle volumenelement er $dV = \sqrt{g}\,du^1du^2du^3$, hvor g er determinaten af g_{ij}-matricen, dvs. $g = A^6\sin^2\theta\sin^4\psi$ og dermed

$$
dV = \underline{A^3\sin\theta\sin^2\psi\, d\phi\, d\theta\, d\psi}
$$

Det totale volumen er

$$
V = A^3\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{\pi}\sin^2\psi\, d\psi = A^3\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{2\pi^2A^3}
$$

Relationen $R_{ij} = -(2/A^2)g_{ij}$ medfører at

$$
R = g^{ij}R_{ij} = -\frac{2}{A^2}\,g^{ij}g_{ij} = -\frac{2}{A^2}\,\delta^i_i = \underline{-\frac{6}{A^2}}
$$

Bemærk, at δ^i_i betyder sporet af den tredimensionale enhedsmatrix. Resultatet kan også fås ved direkte indsættelse af g^{ij} bestemt som den inverse matrix af $\{g_{ij}\}$. "Rummets krumning" er i dette tilfælde givet ved $-R/6$ som er konstant.

En vilkårlig vektor $\mathbf{v}$ der tilhører overfladen kan skrives $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$, hvor v^i er vektorens kontravariante komponenter. Ved en direkte udregning fås

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_1 &= A^2[-\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta\sin^2\psi + \cos\phi\sin\phi\sin^2\theta\sin^2\psi] = 0\\
\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_2 &= A^2[(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\cos\theta\sin\theta\sin^2\psi - \cos\theta\sin\theta\sin^2\psi] = 0\\
\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_3 &= A^2[(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi + \cos^2\theta\sin\psi\cos\psi\\
&\qquad\qquad - \sin\psi\cos\psi] = 0
\end{aligned}
$$

Resultatet $\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_i = 0$ betyder, at $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = v^i(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_i) = 0$ og dermed at de to vektorer <u>$\mathbf{r}$ og $\mathbf{v}$ er vinkelrette på hinanden</u>.

Opgave 36

a) De kovariante basisvektorer er givet ved (19.50) eller (19.53), $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \underline{\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}} \quad ; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \underline{\begin{pmatrix} -t\sin\theta \\ t\cos\theta \\ k \end{pmatrix}}$$

Heraf bestemmes den metriske tensors kovariante komponenter, $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$,

$$\{g_{ij}\} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2+k^2 \end{pmatrix}} \quad \text{og} \quad \{g^{ij}\} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (t^2+k^2)^{-1} \end{pmatrix}}$$

hvor de kontravariante komponenter er udregnet som den inverse matrix, $g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$ eller $\{g^{ij}\} = \{g_{ij}\}^{-1}$. De kontravariante basisvektorer er

$$\mathbf{e}^1 = g^{1j}\,\mathbf{e}_j = \underline{\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}} \quad ; \quad \mathbf{e}^2 = g^{2j}\,\mathbf{e}_j = \underline{\frac{1}{t^2+k^2}\begin{pmatrix} -t\sin\theta \\ t\cos\theta \\ k \end{pmatrix}}$$

b) De afledede af de kovariante basisvektorer er

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial u^2} = -t\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Christoffel symbolerne af 2. art er defineret $\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\} = \mathbf{e}^k \dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u^j}$ og

$$\left\{ {1 \atop 22} \right\} = \underline{-t} \quad ; \quad \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \underline{\frac{t}{t^2+k^2}}$$

mens de resterende fem komponenter er $\underline{0}$.

Ifølge øverst side 720 i *Tensors* er

$$R_{ij;k} = R_{ij,k} - \left\{ {l \atop ik} \right\} R_{lj} - \left\{ {l \atop jk} \right\} R_{il}$$

og dermed

$$\begin{aligned} R_{22;1} &= \frac{\partial R_{22}}{\partial t} - \left\{ {l \atop 21} \right\} R_{l2} - \left\{ {l \atop 21} \right\} R_{2l} = \frac{\partial R_{22}}{\partial t} - 2\left\{ {2 \atop 21} \right\} R_{22} \\ &= -\frac{2k^2 t}{(t^2+k^2)^2} - 2\frac{t}{t^2+k^2}\cdot\frac{k^2}{t^2+k^2} = \underline{-\frac{4k^2 t}{(t^2+k^2)^2}} \end{aligned}$$

Opgave 37

a) De inverse elementer er: $Q^{-1} = \{1, -1, -i, i, -j, j, -k, k\}$.

Idet $(\pm i)^2 = -1$ fås at $(\pm i)^4 = 1$ (og tilsvarende for j og k), dvs. at de 6 elementer $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$ har ordenen 4. -1 har ordenen 2 (og 1 har ordenen 1).

Konjugationsklasser:
± 1 kommuterer med alle elementer, og dermed udgør 1 og -1 hver sin egen konjugationsklasse. Desuden er $j^{-1}ij = -jij = -jk = -i$ og $-kik = -jk = -i$, som medfører, at i og $-i$ er i samme konjugationsklasse og, at de to elementer ikke er i klasse med andre (analogt for j og k). Der er alt i alt 5 konjugationsklasser:

$K(1) = \{1\}$; $K(-1) = \{-1\}$;
$K(i) = \{i, -i\}$; $K(j) = \{j, -j\}$; $K(k) = \{k, -k\}$

b) Undergruppernes orden er divisor i $r = 8 \Rightarrow h = 2$ eller 4, og de er

1 undergruppe af orden 2: $\{1, -1\}$.

3 undergrupper af orden 4: $\{1, i, -1, -i\}$, $\{1, j, -1, -j\}$ og $\{1, k, -1, -k\}$.

Alle 4 (egentlige) undergrupper er invariante, fordi hver af dem kun indeholder hele konjugationsklasser. [De tre 4. ordens undergrupper har index 2 og må derfor være invariante].

Antallet af ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer
= antallet af konjugationsklasser = $\underline{5}$.

Repræsentationernes grader, n_1-n_5, bestemmes af

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 = r = 8$$

som har løsningen $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1, \quad n_5 = 2$.

Karaktertavle:

	$K(1)$	$K(-1)$	$2K(i)$	$2K(j)$	$2K(k)$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
A_3	1	1	-1	-1	1
A_4	1	1	-1	1	-1
E	2	-2	0	0	0

Kommentarer til karaktertavlen:
1) $\chi(1) = n_i$
2) Alle konjugationsklasser indeholder både et element og dets inverse $\Rightarrow$ alle karakterer er reelle, og i de éndimensionale tilfælde er $\chi_A = \pm 1$.
3) Ortogonalitet af rækker $\Rightarrow \chi_A(-1) = \chi_A(1) = 1$ er eneste løsning, og de resterende éndimensionale karakterer er derefter bestemt ved at benytte $\chi_A = +1$ eller -1.
4) χ_E udfyldes (for eksempel) ved at udnytte ortogonalitet af søjler.

Opgave 38

a) G's Cayley-tavle (indgangssøjlen er venstre faktor i produkterne):

	E	I	A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2
E	E	I	A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2
I	I	E	A_2	A_1	B_2	B_1	C_2	C_1
A_1	A_1	A_2	I	E	C_2	C_1	B_1	B_2
A_2	A_2	A_1	E	I	C_1	C_2	B_2	B_1
B_1	B_1	B_2	C_1	C_2	E	I	A_1	A_2
B_2	B_2	B_1	C_2	C_1	I	E	A_2	A_1
C_1	C_1	C_2	B_2	B_1	A_2	A_1	E	I
C_2	C_2	C_1	B_1	B_2	A_1	A_2	I	E

b) Af tavlen fremgår det at elementerne $\{I, B_1, B_2, C_1, C_2\}$ har ordenen 2 og $\{A_1, A_2\}$ har ordenen 4.

Der er 3 undergrupper af 4. orden:

$$H_A = \{E, A_1, I, A_2\} \equiv \mathcal{C}_4$$
$$H_B = \{E, I, B_1, B_2\} \equiv \mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{C}_2$$
$$H_C = \{E, I, C_1, C_2\} \equiv \mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{C}_2$$

c) A_1 og A_2 tilhører samme konjugationsklasse, da fx $B_1^{-1}A_1B_1 = B_1A_1B_1 = A_2$, og da de er de eneste elementer af 4. orden er der ikke andre elementer i denne klasse, sætning (4.4).

Alle elementerne af 2. orden er beskrevet ved unitære matricer, idet der for disse elementer gælder at $U = U^{-1}$ og at $U = U^\dagger$, og dermed at $U^{-1} = U^\dagger$. For de to 4. ordens elementer gælder, at $A_1^{-1} = A_2 = A_1^\dagger$, og tilsvarende for A_2.

Repræsentationen er irreducibel: Indføres en generel matrix $T = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix}$ som antages at kommuterer med alle matricerne i repræsentationen har vi: $TC_1 = C_1T \Rightarrow t_2 = -t_2, t_3 = -t_3$ og dermed at $t_2 = t_3 = 0$, hvorefter $TA_1 = A_1T \Rightarrow t_1 = t_4$. Dermed er den eneste matrix T der kommuterer med alle repræsentationens matricer lig med en konstant gange enhedsmatricen, hvilket er en tilstrækkelig betingelse [sætning (10.6) – (10.8)] for at repræsentationen er irreducibel.

Karakteren af de forskellige elementer er givet ved sporet af matricerne, dvs.

$$\chi(E) = 2 \quad , \qquad \chi(I) = -2 \quad \text{og}$$
$$\chi(A_1) = \chi(A_2) = \chi(B_1) = \chi(B_2) = \chi(C_1) = \chi(C_2) = 0$$

Opgave 39

a) $b_i b_i = a^{-2i+2i} = a^0 = e$, som betyder, at $b_i^{-1} = b_i$ og at ordenen af de forskellige elementer er:

1. orden: e; 2. orden: b_1, b_2, b_3, b_4, b_5; 5. orden: a, a^2, a^3, a^4.

Udregning af de 4 konjugationer giver:

$$\begin{aligned}
&a^{-p}a^q a^p = \underline{a^q}\\
&b_p^{-1}a^q b_p = b_p a^q b_p = b_p b_{2q+p} = a^{-2p+4q+2p} = a^{4q} = \underline{a^{-q}}\\
&a^{-p}b_q a^p = a^{-p}b_{q+3p} = \underline{b_{p+q}}\\
&b_p^{-1}b_q b_p = b_p a^{-2q+2p} = b_{p-6q+6p} = \underline{b_{2p-q}}
\end{aligned}$$

Resultaterne viser at G's konjugationsklasser er

$$K_e = \{e\}; \quad K_a = \{a, a^4\}; \quad K_{a^2} = \{a^2, a^3\}; \quad K_b = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$$

b) Antallet af ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer = antallet af konjugationsklasser = $\underline{4}$.

Repræsentationernes grader n_1-n_4 bestemmes af $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = r = 10$, som har løsningen $n_1 = n_2 = \underline{1}$ og $n_3 = n_4 = \underline{2}$.

Karaktertavle:

	K_e	$2K_a$	$2K_{a^2}$	$5K_b$
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1
E_1	2	x_1	y_1	z_1
E_2	2	x_2	y_2	z_2

Kommentarer til karaktertavlen:
1) $\chi(1) = n_i$
2) Alle konjugationsklasser indeholder både et element og dets inverse $\Rightarrow$ alle karakterer er reelle, og i de éndimensionale tilfælde er $\chi_A = \pm 1$.
3) Ortogonalitet af de to første rækker $\Rightarrow$ $\chi_{A_2}(K_b) = -1$ er eneste løsning.

De resterende 6 ubekendte kan bestemmes på følgende måde:

Normering af sidste søjle: $5[1^2 + (-1)^2 + z_1^2 + z_2^2] = 10 \quad \Rightarrow \quad \underline{z_1 = z_2 = 0}$.

Ortogonalitet af 1. og 2. søjle: $1 + 1 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1 - x_1$

Normering af 2. søjle: $2[1 + 1 + x_1^2 + x_2^2] = 10$, som ved indsættelse af x_2 giver $x_1^2 + x_1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \alpha = \underline{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1 - \alpha = \underline{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$
(andengradsligningen har rødderne α og $-1-\alpha$ og valget $x_1 = -1-\alpha$ vil kun betyde en ombytning af de to sidste rækker i karaktertavlen).
y_1 og y_2 bestemmes af de to samme ligninger. Benyttes fx at 1. og 3./4. række skal være ortogonale fås, at $x_1 = \alpha$ medfører:
$y_1 = -1 - \alpha = \underline{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ og $y_2 = \alpha = \underline{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Opgave 40

a) G's Cayley-tavle:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_2	g_2	g_4	g_6	g_1	g_3	g_5
g_3	g_3	g_6	g_2	g_5	g_1	g_4
g_4	g_4	g_1	g_5	g_2	g_6	g_3
g_5	g_5	g_3	g_1	g_6	g_4	g_2
g_6	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1

Det fremgår umiddelbart af tabellen, at

$$e = g_1 = g_1^{-1};\ g_2^{-1} = g_4;\ g_3^{-1} = g_5;\ g_4^{-1} = g_2;\ g_5^{-1} = g_3;\ g_6^{-1} = g_6$$

g_1 har ordenen $\underline{1}$; g_6 har ordenen $\underline{2}$; g_2 og g_4 har ordenen $\underline{3}$; og g_3 og g_5 har ordenen $\underline{6}$.

G indeholder elementer, g_3 og g_5, som har samme orden som gruppen selv, og dermed er G cyklisk med ordenen $r = 6$ (og g_3 eller g_5 er gruppens frembringer).

De ikke-trivielle undergrupper har ordenen $h = 2$ eller 3 (h er divisor i $r = 6$). g_3 eller g_5 kan ikke være elementer i en undergruppe. Det betyder, at de eneste undergrupper er

$$G_2 = \underline{\{g_1,\ g_6\}} \qquad\qquad G_3 = \underline{\{g_1,\ g_2,\ g_4\}}$$

og de er begge invariante, fordi gruppen G er kommutativ, $g_i g_j = g_j g_i$.

De to undergrupper opfylder betingelserne i sætning (8.2) i gruppeteori-noterne. G_2 og G_3 er invariante undergrupper med fællesmængden $\{g_1 = e\}$ og $G_2G_3 = \{g_1,\ g_2,\ g_4,\ g_6g_1 = g_6,\ g_6g_2 = g_5,\ g_6g_4 = g_3\} = G$. Dermed er $\underline{G \equiv G_2 \otimes G_3}$.

b) Idet G er en Abelsk gruppe danner alle elementer deres egen konjugationsklasse ($g_i^{-1}g_jg_i = g_j$). Dvs. antallet af konjugationsklasser $= r = \underline{6}$. Antallet af ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer = antallet af konjugationsklasser $= \underline{6}$. Repræsentationernes grader n_1-n_6 bestemmes af $\sum n_i^2 = r = 6$, som har løsningen $n_1 = n_2 = \cdots = n_6 = \underline{1}$.

De 6 irreducible éndimensionale repræsentationer er:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
f_1	1	1	1	1	1	1
f_2	1	ω^2	ω	ω^4	ω^5	-1
f_3	1	ω^4	ω^2	ω^2	ω^4	1
f_4	1	1	-1	1	-1	-1
f_5	1	ω^2	ω^4	ω^4	ω^2	1
f_6	1	ω^4	ω^5	ω^2	ω	-1

hvor $\omega = e^{i\pi/3}$; og f_2 og f_6 er tro repræsentationer.

Opgave 41

a) Ordenen af en r-cyklus er r og dermed fås

Orden 1: $\underline{e}$ Orden 2: $\underline{m,\, c,\, d,\, f,\, C,\, D,\, F}$ Orden 3: $\underline{a,\, b}$ Orden 6: $\underline{A,\, B}$.

Det sidste resultat følger af at f.eks. $A \to (45)(123)$ afbildes i et produkt af en transposition og en tricyklus med det fælles mindste multiplum 6.

De inverse elementer til 1. og 2. ordens elementerne $\{e,\, m,\, c,\, d,\, f,\, C,\, D,\, F\}$ er elementet selv, mens $a^{-1} = \underline{b}$, $b^{-1} = \underline{a}$, $A^{-1} = \underline{B}$ og $B^{-1} = \underline{A}$.

m kommuterer pr. definition med alle elementer $g_3 \in D_3$. Dette følger også af at m's billedelement (45) ikke har noget ciffer fælles med cyklerne i S_3. Da $mg_3 = g_3 m$ betyder dette at m også kommuterer med alle de resterende elementer mD_3 i G idet $m(mg_3) = m(g_3 m) = (mg_3)m$.

Benyttes dette resultat samt udnyttes opstillingen af D_3's (eller S_3's) konjugationsklasser givet i eksempel (4.5) på side 10 i noterne, fås at

$$
\begin{array}{lll}
K_e = \underline{\{e\}} \quad ; & K_a = \underline{\{a,\, b\}} \quad ; & K_c = \underline{\{c,\, d,\, f\}} \\
K_m = \underline{\{m\}} \quad ; & K_A = \underline{\{A,\, B\}} \quad ; & K_C = \underline{\{C,\, D,\, F\}}
\end{array}
$$

b) Antallet af ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer =
antallet af konjugationsklasser = $\underline{6}$.

Repræsentationernes grader n_1-n_6 bestemmes af $n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2+n_5^2+n_6^2 = r = 12$, som har løsningen $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = \underline{1}$ og $n_5 = n_6 = \underline{2}$.

Der er fire éndimensionale irreducible repræsentationer og denne del af karaktertavlen er:

	K_e	$2K_a$	$3K_c$	K_m	$2K_A$	$3K_C$
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1	-1
A_3	1	1	-1	1	1	-1
A_4	1	1	-1	-1	-1	1

Kommentarer til karaktertavlen:
1) $\chi(e) = n_i = 1$.
2) Alle konjugationsklasser indeholder både et element og dets inverse $\Rightarrow$ alle karakterer er reelle, og i de éndimensionale tilfælde er $\chi = \pm 1$.
3) Elementerne i K_a er af 3. orden og dermed er eneste mulighed $\chi(K_a) = +1$.
4) Ortogonalitet af rækkerne fastlægger nu et entydigt sæt for valg af fortegn.

Produktet af de to undergrupper $\{e,\, a,\, b\}$ og $\{e,\, c\}$ frembringer gruppen D_3 idet $\{e,\, a,\, b\}\{e,\, c\} = \{e,\, a,\, b,\, c,\, ac,\, bc\} = D_3$, da $ac = d$ og $bc = f$ [idet $(123)(23) = (13)$ og $(132)(23) = (12)$]. Undergruppen $\{e,\, a,\, b\}$ er invariant men det er $\{e,\, c\}$ ikke, idet den kun indeholder en del af konjugationsklassen K_c. Dermed opfylder de to undergrupper ikke alle de krav (8.2) de skal for at D_3 er isomorf med det direkte produkt af de to grupper.

Opgave 42

a) Multipliceres to vilkårlige elementer i G fås:

$$\begin{aligned}[a_1,b_1][a_2,b_2] &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2+a_2b_1 \\ 0 & a_1a_2 \end{pmatrix} \\ &= [a_1a_2, a_1b_2+a_2b_1] \in G \end{aligned} \tag{1}$$

og dermed at G, med matrixmultiplikation som kompositionsregel, er stabil.

1) Den associative lov er opfyldt ved matrixmultiplikation.

2) Det neutrale element er enhedsmatricen og $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [1,0] \in G$

3) Det inverse element til et vilkårligt element i G er $[a,b]^{-1} = \left[\dfrac{1}{a}, -\dfrac{b}{a^2}\right] \in G$

G opfylder alle gruppeaksiomerne, og $\underline{G \text{ er en gruppe}}$. Gruppen er $\underline{\text{Abelsk}}$, idet $[a_1,b_1][a_2,b_2] = [a_2,b_2][a_1,b_1]$ ifølge (1).

b) Begge delmængderne A og B er stabile:

$$[a_1,0][a_2,0] = [a_1a_2,0] \in A \quad (2a); \qquad [1,b_1][1,b_2] = [1,b_1+b_2] \in B \quad (2b)$$

Det neutrale element $e \in A$ og $e \in B$. Om de inverse elementer gælder $[a,0]^{-1} = [1/a, 0] \in A$ og $[1,b]^{-1} = [1,-b] \in B$. Dermed opfylder både A og B betingelserne for at være $\underline{\text{undergrupper i } G}$. Da gruppen er Abelsk $\Rightarrow$ $\underline{\text{de to undergrupper } A \text{ og } B \text{ er normale}}$.

A og B er to invariante undergrupper i G, hvis eneste fælles element er det neutrale element e, og mængden $AB = \{[a,0][1,b] = [a,ab]\} = G$. Dermed er $\underline{G \equiv A \otimes B}$ ifølge sætning (8.2) i gruppeteori-noterne.

Faktorgruppen $G|A$ er isomorf med gruppen af alle reelle tal med addition som kompositionsregel:

$$\begin{aligned} G|A &= \{A = \{[a,0]\},\ [1,b_1]A = \{[a,ab_1]\},\ [1,b_2]A = \{[a,ab_2]\}, \dots\} \\ &\equiv \{0,\ b_1,\ b_2, \dots \mid b_i \in \mathbb{R}\} = (\mathbb{R},+) \end{aligned}$$

Afbildningen $f([a,ab]) = b$ med addition af billedelementerne er en homomorfi

$$\begin{aligned} &f([a_1,a_1b_1][a_2,a_2b_2]) = f([a_1a_2, a_1a_2(b_1+b_2)]) = b_1+b_2 \quad \mapsto \\ &f([a_1,a_1b_1]) \circ f([a_2,a_2b_2]) = f([a_1,a_1b_1]) + f([a_2,a_2b_2]) = b_1+b_2 \end{aligned}$$

Det neutrale element A i $G|A$ er det eneste der afbildes i det neutrale element 0 af $(\mathbb{R},+)$, og dermed er afbildningen en isomorfi.

Analogt ses at faktorgruppen $G|B$ er isomorf med gruppen af reelle tal $\neq 0$ organiseret med sædvanlig multiplikation som kompositionsregel.

$$G|B = \{B = \{[1,b]\},\ [a_1,0]B = \{[a_1,a_1b]\}, \dots\} \equiv (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$$

Med afbildningen $f([a,ab]) = a$ og multiplikation af billedelementerne fås

$$\begin{aligned} &f([a_1,a_1b_1][a_2,a_2b_2]) = f([a_1a_2, a_1a_2(b_1+b_2)]) = a_1a_2 \quad \mapsto \\ &f([a_1,a_1b_1]) \circ f([a_2,a_2b_2]) = f([a_1,a_1b_1])f([a_2,a_2b_2]) = a_1a_2 \end{aligned}$$

hvor det neutrale element B i $G|B$ er det eneste der afbildes i det neutrale element 1 af $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$ $\Rightarrow$ afbildningen er en isomorfi.

Opgave 43

a) Elementernes orden i en gruppe af 9. orden er 1, 3, eller 9. I gruppen $\mathcal{C}_9$ har e som eneste element ordenen 1, $\{c^3,\ c^6\}$ har ordenen 3, og de resterende $\{c,\ c^2,\ c^4,\ c^5,\ c^7,\ c^8\}$ har ordenen 9.

G_9 er isomorf med det direkte produkt af to Abelske grupper [cykliske grupper er Abelske], og en af egenskaberne ved denne isomorfi er, at et vilkårligt element i den ene undergruppe kommuterer med et vilkårligt element i den anden undergruppe. Hermed er G_9 Abelsk, og elementerne er

$$G_9 = \{e,\ a,\ b,\ a^2,\ b^2,\ ab,\ a^2b,\ ab^2,\ a^2b^2\}$$

Der er ingen mulighed for et element af 9. orden i G_9. Det betyder at da kun e har ordenen 1, har alle de andre otte elementer ordenen 3.

b) G_9's egentlige undergrupper er alle af 3. orden og dermed isomorfe med $\mathcal{C}_3$ (eneste gruppe af 3. orden):

$$G_a = \{e,\ a,\ a^2\} \quad ; \quad G_b = \{e,\ b,\ b^2\}$$

$$G_{ab} = \{e,\ ab,\ a^2b^2\} \quad ; \quad G_{a^2b} = \{e,\ a^2b,\ ab^2\}$$

Da gruppen er Abelsk er alle undergrupperne invariante.

I en Abelsk gruppe er alle irreducible repræsentationer af første grad. Desuden er antallet af konjugationsklasser lig antallet af elementer i gruppen, som igen er lig antallet af ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer. Dvs. der er ni forskellige irreducible repræsentationer, $f_1,\ f_2, \ldots,\ f_9$, af gruppen G_9.

Indføres $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ og udnyttes homomorfiegenskaben: $f(a^ib^j) = [f(a)]^i[f(b)]^j$ kan tabellen udfyldes:

	e	a	b	a^2	b^2	ab	a^2b	b^2a	a^2b^2
f_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
f_2	1	1	ω	1	ω^2	ω	ω	ω^2	ω^2
f_3	1	1	ω^2	1	ω	ω^2	ω^2	ω	ω
f_4	1	ω	1	ω^2	1	ω	ω^2	ω	ω^2
f_5	1	ω	ω	ω^2	ω^2	ω^2	1	1	ω
f_6	1	ω	ω^2	ω^2	ω	1	ω	ω^2	1
f_7	1	ω^2	1	ω	1	ω^2	ω	ω^2	ω
f_8	1	ω^2	ω	ω	ω^2	1	ω^2	ω	1
f_9	1	ω^2	ω^2	ω	ω	ω	1	1	ω^2

Opgave 44

a) Benyttes regnereglen $yx = x^2y$ fås:

$$yx^2 = yxx = x^2yx = x^4y = \underline{xy} \quad ; \quad y^2x = yyx = yx^2y = xyy = \underline{xy^2}$$

Af den sidste ligning følger, at y^2 også kommuterer med x^2 og dermed med alle elementerne x^py^q i G_{12}. Benyttes disse tre regneregler fås f.eks.:

$$(x^2y)^2 = x^2yx^2y = x^2xyy = y^2 \quad \Rightarrow \quad (x^2y)^4 = y^4 = 1$$

Orden 1: $\underline{e}$ Orden 2: $\underline{y^2}$ Orden 3: $\underline{x,\, x^2}$
Orden 4: $\underline{y,\, xy,\, x^2y,\, y^3,\, xy^3,\, x^2y^3}$ Orden 6: $\underline{xy^2,\, x^2y^2}$

Alle elementer i en konjugationsklasse har samme orden, og benyttes

$$y^{-1}xy = y^3xy = x^2y^4 = x^2 \quad ; \quad y^{-1}(xy^2)y = x^2y^2$$
$$x^{-1}yx = x^2x^2y = xy \quad ; \quad x^{-1}(xy)x = yx = x^2y$$

fås, at G_{12} opdeles i seks konjugationsklasser:

$$K_e = \underline{\{e\}} \quad ; \quad K_{y^2} = \underline{\{y^2\}} \quad ; \quad K_x = \underline{\{x,\, x^2\}}$$
$$K_{xy^2} = \underline{\{xy^2,\, x^2y^2\}} \quad ; \quad K_y = \underline{\{y,\, xy,\, x^2y\}} \quad ; \quad K_{y^3} = \underline{\{y^3,\, xy^3,\, x^2y^3\}}$$

b) $\overline{\overline{Y}}$ opfylder regnereglerne i undergruppen $\mathcal{C}_4(y)$, idet $\overline{\overline{Y}}^2 = -\overline{\overline{E}}$ og dermed $\overline{\overline{Y}}^4 = \overline{\overline{E}}$ (den todimensionale enhedsmatrix). Desuden er:

$$\overline{\overline{X}}^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overline{\overline{X}}^3 = \overline{\overline{X}}^2\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{E}}$$

dvs. at $\overline{\overline{X}}$ kan benyttes til at repræsentere x i $\mathcal{C}_3(x)$. Endelig haves:

$$\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{X}} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & -\frac{i\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{i\sqrt{3}}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} = \overline{\overline{X}}^2\overline{\overline{Y}}$$

og alle regneregler i gruppen G_{12} er opfyldt. Matricerne $\overline{\overline{X}}^p$ $(p = 1, 2)$ og $\overline{\overline{Y}}^q$ $(q = 1, 2, 3)$ er forskellige fra hinanden og fra enhedsmatricen. Dermed er alle elementerne i G_{12} repræsenteret ved forskellige matricer, og repræsentationen er tro. Idet $\overline{\overline{X}}^{-1} = \overline{\overline{X}}^2 = \overline{\overline{X}}^\dagger$ og $\overline{\overline{Y}}^{-1} = -\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{Y}}^\dagger$ er de to matricer unitære, og da produkter af unitære matricer er unitære fås, at repræsentationen er unitær. Elementer i samme konjugationsklasse har samme karakter, og i denne todimensionale repræsentation er:

$$\chi(e) = \underline{2} \quad ; \quad \chi(y^2) = \underline{-2} \quad ; \quad \chi(x, x^2) = \underline{-1}$$
$$\chi(xy^2, x^2y^2) = \underline{1} \quad ; \quad \chi(y, xy, x^2y) = \underline{0} \quad ; \quad \chi(y^3, xy^3, x^2y^3) = \underline{0}$$

[Det skal tilføjes, at repræsentationen **er** irreducibel.]

Opgave 45

a) At antallet af elementer i G er lig antallet af matricer, der kan dannes ud fra $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$, betyder at afbildningen $\boldsymbol{f}$ er en isomorfi. Repræsentationsgruppen $\mathcal{G} = \boldsymbol{f}(G)$ indeholder de to elementer $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$ og følgende elementer:

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{A}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E};$$
$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix};$$

$\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$. Isomorfien $\mathcal{G} \equiv G$ betyder, at gruppen G har ordenen $\underline{8}$ og indeholder elementerne $\underline{G = \{a, a^2, a^3, a^4, b, ab, a^2b, a^3b\}}$, hvor det neutrale element $e = a^4$ har ordenen 0 eller 1. $\{a, a^3, ab, a^3b\}$ har ordenen $\underline{4}$; $\{a^2, b, a^2b\}$ har ordenen $\underline{2}$. Afbildningen $G \mapsto \mathcal{G}$ er givet ved $\underline{\boldsymbol{f}(a^ib^j) = \boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}^j}$. Gruppen $\underline{G \text{ er Abelsk}}$, $ab = ba$. At gruppen er Abelsk betyder at alle undergrupper er normale, og de har enten ordenen 2 eller 4. De invariante undergrupper er:

$$\mathcal{C}_4 = \{e, a, a^2, a^3\}; \quad \mathcal{C}_4' = \{e, ab, a^2, a^3b\}; \quad \mathcal{D}_4 = \{e, b, a^2, a^2b\};$$
$$\mathcal{C}_2 = \{e, b\}; \quad \mathcal{C}_2' = \{e, a^2b\}; \quad \mathcal{D}_2 = \{e, a^2\}$$

b) De to undergrupper $\mathcal{C}_2$ og $\mathcal{C}_4$ er begge invariante. Deres eneste fælles element er e og $\mathcal{C}_4\mathcal{C}_2 = \{e, a, a^2, a^3\}\{e, b\} = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\} = G$. Dermed er alle kriterier opfyldt, sætning (8.2), for at $G \equiv \underline{\mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{C}_4}$. De tilsvarende ligninger gælder hvis $\mathcal{C}_4$ erstattes af $\mathcal{C}_4'$ og/eller $\mathcal{C}_2$ erstattes af $\mathcal{C}_2'$.

Repræsentationen $\boldsymbol{f}$ er <u>reducibel</u>, idet alle matricerne i $\mathcal{G}$ er på "blokdiagonalform". I en Abelsk gruppe er antallet af konjugationsklasser, og dermed antallet af irreducible repræsentationer, lig antallet af elementer i gruppen, og alle irreducible repræsentationer har graden 1.

Udnyttes homomorfiegenskaberne fås f.eks., at $f(a^4) = [f(a)]^4 = f(e) = 1 \Rightarrow f(a) = 1, i, -1, -i$; og tilsvarende $f(b^2) = [f(b)]^2 = f(e) = 1 \Rightarrow f(b) = 1, -1$. Herefter kan repræsentationstavlen, identisk med karaktertavlen, udfyldes:

	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
f_1	1	1	1	1	1	1	1	1
f_2	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$
f_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
f_4	1	$-i$	-1	i	1	$-i$	-1	i
f_5	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
f_6	1	i	-1	$-i$	-1	$-i$	1	i
f_7	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
f_8	1	$-i$	-1	i	-1	i	1	$-i$

For et vilkårligt element $g \in G$ fås, at $\underline{\boldsymbol{f}(g) = \begin{pmatrix} f_2(g) & 0 \\ 0 & f_6(g) \end{pmatrix}}$

Bemærk, at ingen af de irreducible repræsentationer er tro, hvorimod den reducible repræsentation $\boldsymbol{f}$ er tro.

Opgave 46

a)

$$G_a = \{e,\, a\} \quad , \qquad G_b = \{e,\, b,\, b^2,\, b^3,\, b^4,\, b^5\}$$

Af betingelserne for at $G \equiv G_a \otimes G_b$ [sætning (8.2) i gruppeteori-noterne] følger, at antallet af elementer i G er: $\underline{G\text{'s orden} = 2 \times 6 = 12}$, og at ethvert element i G_a kommuterer med ethvert i G_b og dermed $ab = ba$. Da de to cykliske undergrupper hver for sig er Abelske fås, at $\underline{G \text{ er Abelsk}}$.

$$G = \underline{\{e,\, b,\, b^2,\, b^3,\, b^4,\, b^5,\, a,\, ab,\, ab^2,\, ab^3,\, ab^4,\, ab^5\}}$$

Gruppens elementer har

Orden 1: e Orden 2: $\underline{a,\, b^3,\, ab^3}$ Orden 3: $\underline{b^2,\, b^4}$
Orden 6: $\underline{b,\, b^5,\, ab,\, ab^5,\, ab^2,\, ab^4}$

En undergruppes index = antal af sideklasser = gruppens orden r divideret med undergruppens orden h. I dette tilfælde er de egentlige $(1 < h < r)$ muligheder $r/h = 6,\, 4,\, 3,\, 2$ eller $h = 2,\, 3,\, 4,\, 6$. Undergrupperne hvis index er større end 3 er:

$$H_1 = \underline{\{e,\, a\}}, \qquad H_2 = \underline{\{e,\, b^3\}}, \qquad H_3 = \underline{\{e,\, ab^3\}}, \qquad H_4 = \underline{\{e,\, b^2,\, b^4\}}$$

b) Alle undergrupper i en Abelsk gruppe er invariante (normale). Dvs. vi skal bestemme faktorgrupperne til de 4 undergrupper H_1-H_4. For $j = 1,\, 2,$ og 3 kan faktorgrupperne skrives

$$G|H_j = \underline{\{H_j,\, abH_j,\, b^2H_j,\, ab^3H_j,\, b^4H_j,\, ab^5H_j\}} \equiv \underline{\mathcal{C}_6}, \quad \text{frembringer: } \underline{abH_j}$$

Alle disse tre faktorgrupper er isomorfe med den cykliske gruppe af 6. orden. Bemærk, at et frembringerelement kan erstattes af sit inverse element, ab^5H_j, og at ethvert af elementerne kan udtrykkes på to måder (afhængigt af j). Endelig haves

$$G|H_4 = \underline{\{H_4,\, aH_4,\, bH_4,\, abH_4\}} \equiv \{e,\, a,\, b^3,\, ab^3\} \equiv \underline{\mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{C}_2}$$

dvs. Klein's fire-gruppe.

De egentlige undergrupper i G, hvis index er større end 3, er de 4 fundet under punkt a). Gruppen indeholder én undergruppe med index 3: $\{e,\, a,\, b^3,\, ab^3\}$. Hvert af de 6 elementer af orden 6 frembringer en cyklisk undergruppe med index 2, som to og to er identiske. Gruppen G indeholder $4 + 6/2 + 1 = \underline{8}$ forskellige egentlige undergrupper.

Opgave 47

a)

$$\begin{aligned} G &= \underline{\{(1),\ (1234),\ (13)(24),\ (1432),\ (14)(23),\ (12)(34),\ (13),\ (24)\}} \\ P &= \underline{\{(1),\ (13),\ (24),\ (13)(24)\}} \\ Q &= \underline{\{(1),\ (12),\ (34),\ (12)(34)\}} \end{aligned}$$

G's orden er 8. P og Q er begge af orden 4.

For eksempel er $(13)\cdot(12)(34) = (1432)$ og $(12)(34)\cdot(13) = (1234)$, og dermed $(13)\cdot(12)(34) \neq (12)(34)\cdot(13) \;\Rightarrow G$ er <u>ikke-Abelsk</u>. De to andre grupper P og Q er begge <u>Abelske</u>.

Alle elementerne i P findes i G, dvs. P er en delmængde af G. Da P selv er en (symmetri-)gruppe $\Rightarrow$ <u>P er en undergruppe i G</u>. To af Q's elementer, (12) og (34), er ikke elementer i $G \Rightarrow$ <u>Q er ikke en undergruppe i G</u>.

Ifølge eksempel (8.5) side 22 i noterne er der kun to mulige 4. ordens grupper, den cykliske $\mathcal{C}_4$ og Klein's firegruppe $\mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{C}_2$. Begge grupper P og Q er af 4. orden og indeholder, foruden det neutrale element, kun elementer af 2. orden $\Rightarrow P \equiv \mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{C}_2$ og $Q \equiv \mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{C}_2$ og dermed at <u>$P \equiv Q$</u>.

b)

Ifølge side 10–11 i noterne ændres typen af et element i S_4 ikke ved en konjugation, dvs. skal gruppen Q afbildes på P vha. en konjugation er der kun to muligheder. Den første er $(12) \mapsto (13) \wedge (34) \mapsto (24)$. Benyttes regnereglen for konjugation nederst på side 10 fås, at i dette tilfælde har t mulighederne <u>$t = (23),\ (132),\ (234),\ (1342)$</u>. Den anden afbildning $(12) \mapsto (24) \wedge (34) \mapsto (13)$ dannes ved konjugation med <u>$t = (14),\ (124),\ (143),\ (1243)$</u>. Bemærk, at ingen af de otte elementer er elementer i G eller Q.

P's orden er mindre end G's orden, og $\ker f$'s orden må være større end 1. Den mindste mulighed er 2, og denne mulighed kan kun realiseres på én måde, idet $\ker f$ skal være en normal undergruppe i G. (13)(24) danner sin egen konjugationsklasse, mens de fire andre 2. ordens elementer danner to konjugationsklasser med to elementer i hver, dvs. at den eneste invariante undergruppe i G af 2. orden er $\ker f = \{(1),\ (13)(24)\}$. Faktorgruppen $G|\ker f = \{\,\{(1),(13)(24)\},\ \{(13),(24)\},\ \{(14)(23),(12)(34)\},\ \{(1234),(1432)\}\,\}$ ses at være isomorf med Klein's firegruppe og dermed med P. En homorfisk afbildning af G ind i P kan herefter etableres ved

$$\begin{aligned} &\{(1),(13)(24)\} \mapsto (1)\,; && \{(13),(24)\} \mapsto (13) \\ &\{(14)(23),(12)(34)\} \mapsto (24)\,; && \{(1234),(1432)\} \mapsto (13)(24) \end{aligned}$$

eller alle andre mulige permutationer af de tre 2. ordens elementer i P.