Eksamensopgaver i Matematik F2

I. Numeriske metoder og Laplace transformation

Opgave 1 (V 97/98)

Funktionen $f(x)$ er beskrevet ved følgende tabel [$f_j = f(x_j)$]:

j	x_j	f_j
0	0	1.00000
1	0.1	1.11110
2	0.2	1.24960
3	0.3	1.42510
4	0.4	1.64960
5	0.5	1.93750
6	0.6	2.30560

og den fjerde afledede: $M_4 = f^{(4)}(x) = 24$ i intervallet $0 \leq x \leq 0.6$.

a) Benyt Simpson's algoritme (med $2m = 6$) til at beregne en tilnærmet værdi $\tilde{J}$ for integralet $J = \int_0^{0.6} f(x)dx$. Vurder fejlen $\epsilon_S = J - \tilde{J}$.

b) Udregn en tilnærmet værdi $p_{n=3}(x)$ for $f(x)$ når $x = 0.15$, ved at benytte Newton's forlæns-difference interpolationsformel til 3. orden med startværdien $x_0 = 0$. Bestem fejlen $\epsilon_3 = f(0.15) - p_3(0.15)$.

Opgave 2 (S 98)

Fresnel-integralet $C(x)$ er defineret

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$$

a) Beregn en tilnærmet værdi $\tilde{C}(1)$ for værdien af integralet for $x = 1$. Benyt både trapez-metoden og Simpsons algoritme. I begge tilfælde anvendes en intervallængde $h = \Delta t = 0.1$, og der regnes med 5 decimalers nøjagtighed.

b) Fejlen $\epsilon = J - \tilde{J}$ ved udregning af et integral $J = \int_a^b f(t)dt$ er

$$\epsilon = -\frac{h^2}{12}\Big[f'(b) - f'(a)\Big] \qquad \text{(trapez-metoden)}$$

$$\epsilon = -\frac{h^4}{180}\Big[f'''(b) - f'''(a)\Big] \qquad \text{(Simpsons algoritme)}$$

i grænsen $h \to 0$. Benyt disse udtryk til at bestemme fejlen ved hver af de to udregninger af $\tilde{C}(1)$. Giv en vurdering af nøjagtigheden af at benytte $C(1) \simeq \tilde{C}(1) + \epsilon$ ved at sammenligne resultaterne, som de to metoder giver for $C(1)$.

Niels Bohr Institutet, Februar 2006

Opgave 3 (V 98/99)

Funktionen $f(x)$ opfylder følgende 4 betingelser:

$$f(0) = 2, \qquad f(1) = 1, \qquad f(2) = -2, \qquad f(3) = 3,$$

og $f(x)$ tilnærmes med 3. grads polynomiet gennem de fire punkter, $f(x) \approx p_3(x)$.

a) Benyt Lagranges interpolationsmetode til at opstille udtrykket for $p_3(x)$.

b) Find løsningen x_p til ligningen $p_3(x) = 0$ i intervallet $1 < x < 2$, ved hjælp af Newtons (Newton–Raphsons) iterationsmetode. Benyt $x = 1$ som startværdi, og bestem x_p med 5 decimalers nøjagtighed.

Antag, at den numeriske værdi af den fjerde afledede er $|f^{(4)}(x)| \approx 1$ for $x = x_p$.

c) Bestem den numeriske fejl $|\epsilon| = |f(x) - p_3(x)|$ for $x = x_p$. Benyt $|\epsilon|$ til at give en vurdering af det interval omkring x_p, som indeholder en løsning til $f(x) = 0$.

Opgave 4 (V 99/00)

Tredjegrads-polynomiet, $p_3(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$, går gennem de fire punkter: $(x, y) = (0, 1),\ (1, 1),\ (2, -1)$, og $(3, 1)$.

a) Benyt Newtons interpolationsmetode til at bestemme $f(x) = p_4(x)$ ud fra $p_3(x)$, hvor fjerdegrads-polynomiet $p_4(x) = p_3(x)$ for $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, samt $p_4(x = 4) = 1$.

   Beregn integralet $J = \int_0^4 f(x)dx$.

b) Anvend Simpson's algoritme til at beregne en tilnærmet værdi $\tilde{J}$ for det samme integral J ud fra funktionsværdierne $f(x)$ for $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

   Bestem fejlen $\epsilon = J - \tilde{J}$ ved at benytte $\epsilon \simeq -\frac{h^4}{180}\left[f'''(b) - f'''(a)\right]$,

   hvor $h = \Delta x$ er længden af intervalopdelingen og a og b er nedre og øvre grænse af integralet, der beregnes ved Simpson's algoritme. Sammenlign resultatet med den korrekte værdi af ϵ.

Opgave 5 (S 01)

Besselfunktionen af 0te orden $J_0(x)$ kan bestemmes ud fra et integral:

$$J_0(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x, \theta)d\theta \qquad ; \qquad g(x, \theta) = \frac{2}{\pi}\cos(x \sin\theta) \tag{1}$$

og $J_0(x_0) = f_0 = 0.7652$, $J_0(x_1) = f_1 = 0.2239$ og $J_0(x_2) = f_2 = -0.2601$, hvor $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ og $x_2 = 3$.

a) Find andengradspolynomiet $p_2(x)$ gennem de tre punkter (x_i, f_i).
   Benyt $p_2(x)$ til at finde en tilnærmet løsning $\tilde{x}$ til ligningen $J_0(x) = 0$, for $0 < x < 3$. Vurdér fejlen $\epsilon_2(\tilde{x}) = J_0(\tilde{x}) - p_2(\tilde{x})$, idet $J_0'''(\tilde{x}) \simeq 0.33$.

b) Anvend trapez-metoden til at udregne integralet (1) for $x = \tilde{x}$ ved at benytte to forskellige intervallængder $\Delta\theta = h = 0.25\pi$ og $h = 0.1\pi$. Vurdér fejlen ϵ_J for $h = 0.1\pi$ ud fra de to udregninger af integralet. Find en bedre løsning $\overline{x}$ end $\tilde{x}$ til ligningen $J_0(x) = 0$.

Opgave 6 (V 01/02)

$$J = \int_a^b f(x)dx = \int_{0.1\pi}^{0.5\pi} \frac{1}{\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos(0.1\pi)}{1-\cos(0.1\pi)} \tag{1}$$

a) Udregn en tilnærmet værdi $\tilde{J}_a$ af integralet ved at benytte Simpsons algoritme med intervallængden $h = 0.1\pi$ ($2m = 4$). Bestem fejlen ved at sammenligne resultatet med den analytiske værdi af integralet. Der regnes med 5 decimalers nøjagtighed.

b) Integralet kan omskrives til:

$$J = \int_{0.1\pi}^{0.5\pi} \frac{1}{x}\,dx + J_1 \qquad (2a); \qquad J_1 = \int_{0.1\pi}^{0.5\pi} \left[\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right] dx \qquad (2b)$$

Bestem en tilnærmet værdi for J_1 ved at benytte samme forskrift som under punkt a). Udregn en ny tilnærmet værdi $\tilde{J}_b$ for J ved at addere værdien af det første integral i (2a) til det tilnærmede resultat for J_1. Vurdér fejlene af de to numeriske udregninger af integralet ved at benytte $\epsilon_a = J - \tilde{J}_a = -(h^4/180)[f'''(b) - f'''(a)]$ og tilsvarende for $\epsilon_b = J - \tilde{J}_b$. Sammenlign disse fejlvurderinger med de korrekte værdier og kommentér.

Opgave 7 (S 03)

j	x_j	f_j
0	0	1.0000
1	1	0.8660
2	2	0.5000
3	3	0.0000

a) Tabellen viser sammenhørende værdier af x og $f(x)$, hvor $f_j = f(x_j)$. Benyt Newton's forlæns-difference interpolationsformel til 3. orden til at beregne tilnærmede værdier for $f(0.5)$, $f(1.5)$, og $f(2.5)$. En vurdering giver, at $f^{(4)}(t) \approx 0.05$ når $0 < t < 3$. Bestem fejlens størrelse for hver af de tre interpolationer.

b) Beregn følgende to tilnærmede værdier for integralet $J = \int_0^3 f(x)dx$:
i) $\tilde{J}_1$ bestemt alene ved de fire f_j værdier i tabellen og udregnet vha. trapez-metoden ($h = 1$). Bestem fejlen $\epsilon_1 = J - \tilde{J}_1$ ved at benytte, at $f''(t) \approx [f'(3) - f'(0)]/(3-0) \approx \langle\Delta^2 f_j\rangle/h^2$.
ii) $\tilde{J}_2$ bestemt ud fra f_j og interpolationsværdierne for $f(0.5)$, $f(1.5)$, og $f(2.5)$ ved at benytte Simpsons algoritme med $h = 0.5$. Vurdér den totale fejl $\epsilon_2 = J - \tilde{J}_2$.
Kommentér og sammenlign resultaterne af de to metoder.

Opgave 8 (S 99)

Der er givet følgende 1. ordens differentialligning med begyndelsesbetingelse:

$$y' = f(x, y) = x - y \qquad ; \qquad y(0) = 1 \tag{1}$$

a) Bestem Laplace-transformen af $y(x)$: $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}$. Find $y(x)$ og udregn $y(1)$.

b) Anvend Runge-Kutta algoritmen (af 4. orden) til en numerisk beregning af $y(1)$ ud fra ligning (1). Benyt intervalopdelingen $h = 1$ (kun ét interval).

c) Skitsér funktionen $y(x)$, fundet under spørgsmål a), for $0 \leq x < \infty$. Herunder hører en bestemmelse af funktionens extrema og asymptote.

Opgave 9 (S 00)

Funktionen $f(t)$ er givet ved integralet

$$f(t) = \int_0^t \tau \sin(t - \tau) d\tau \tag{1}$$

a) Bestem den Laplace transformerede $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ og udregn $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. Angiv værdien af $f(\pi/2)$ med fem decimaler.

b) Benyt trapez-metoden til at udregne en tilnærmet værdi $\tilde{f}(t)$ af integralet givet ved (1) når $t = \pi/2$. Anvend en ækvidistant intervalopdeling med $h = 0.1\pi$ og udregn resultatet med fem decimalers nøjagtighed.

   Bestem fejlen $\epsilon = f(\pi/2) - \tilde{f}(\pi/2)$ ved at benytte $\epsilon = -\dfrac{h^2}{12}\left[g'(b) - g'(a)\right]$, hvor $g(\tau)$ er funktionen der integreres vha. trapez-metoden, og a og b er nedre og øvre grænse af integralet. Sammenlign resultatet $\tilde{f}(\pi/2) + \epsilon$ med den korrekte værdi af $f(\pi/2)$.

Opgave 10 (V 00/01)

Funktionen $y = y(x)$ er løsningen til differentialligningen

$$y' = f(x, y) = y + 2x \qquad ; \qquad y(0) = 1 \tag{1}$$

med den angivne begyndelsesbetingelse.

a) Bestem den Laplace transformerede $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}$ og udregn $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

b) Benyt Eulers forbedrede metode ("Improved Euler Method") til at udregne en tilnærmet værdi $\tilde{y}(1)$ for funktionen $y(x)$ givet ved (1), når $x = 1$. Anvend en ækvidistant femdeling af intervallet mellem $x = 0$ og 1, dvs. $h = 0.2$.

   Bestem den relative fejl $\epsilon_r = [y(1) - \tilde{y}(1)]/y(1)$.

Opgave 11 (S 02)

Funktionen $y = y(x)$ er løsningen til differentialligningen

$$y' = f(x, y) = y + x^2 \; ; \quad \text{med begyndelsesbetingelsen } y(0) = 0$$

a) Bestem den Laplace transformerede $Y(s) = \mathfrak{L}\{y(x)\}$ og udregn $y(x) = \mathfrak{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

b) Benyt Eulers forbedrede metode ("Improved Euler Method") til at udregne en tilnærmet værdi $\tilde{y}(1)$ for funktionsværdien $y(1)$. Anvend en ækvidistant femdeling af intervallet mellem $x = 0$ og 1, dvs. $h = 0.2$. Bestem den relative fejl $\epsilon_r = [y(1) - \tilde{y}(1)]/y(1)$.

Opgave 12 (V 02/03)

$$y(t) = \int_0^t \tau^{3/2} \sqrt{t - \tau}\, d\tau \tag{1}$$

a) Bestem den Laplace transformerede funktion $Y(s) = \mathfrak{L}\{y(t)\}$. Find $y(t)$ og angiv værdien af $y(1)$ med 5 decimaler.

b) Beregn en tilnærmet værdi $\tilde{J}$ af følgende integral

$$J = \int_0^1 f(x) dx \, ; \qquad f(x) = [x^{3/2} - 1]\sqrt{1 - x} \tag{2}$$

ved at benytte trapez metoden med en intervallængde $h = 0.25$. Bestem fejlen $\epsilon = J - \tilde{J} = -(h^2/12)[f'(1) - f'(0)]$. Udnyt $\tilde{J} + \epsilon$ til en tilnærmet beregning af $y(1)$. Hvilken fordel har denne numeriske beregning af $y(1)$ sammenlignet med den direkte metode som benytter $f(x) = x^{3/2}\sqrt{1 - x}$?

Opgave 13 (V 03/04)

Funktionen $y = y(x)$ opfylder følgende differentialligning:

$$x\, y' + y = g(x) \qquad ; \qquad y(0) = g(0)$$

a) Vis at løsningen er $y(x) = \dfrac{1}{x}\,\mathfrak{L}^{-1}\left\{\dfrac{G(s)}{s}\right\}$, hvor $G(s) = \mathfrak{L}\{g(x)\}$ betegner Laplace transformationen af $g(x)$ mht. x. Benyt dette resultat til at bestemme $y(x)$, når $g(x) = \delta(x - a)$.

b) Med begyndelsespunktet $(x_0, y_0) = (0, g(0))$ og en intervallængde $h = 0.5$ skal $y(x = 2)$ beregnes numerisk ved at anvende Eulers "simple" metode (Euler–Cauchy) på differentialligningen i tilfældet $g(x) = \sin x$. Bestem den eksakte løsning, når $g(x) = \sin x$, og sammenlign den korrekte værdi af $y(2)$ med det numeriske resultat.

Opgave 14 (S 04)

Funktionen $y = y(x)$ er bestemt ved følgende udtryk:

$$y(x) = \left(y(0) + \int_0^x r(u)\, e^u \, du \right) e^{-x} \qquad (1)$$

a) Beregn $y(1)$, når $y(0) = 1$ og $r(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, ved at benytte trapezmetoden til at udregne integralet. Benyt intervallængden $h = 0.25$ og regn med 5 decimalers nøjagtighed. Bestem størrelsen af fejlen $\epsilon(y)$ på beregningen af $y(1)$.

b) Vis, ved at benytte teorien for Laplace transformationen, at det generelle integraludtryk (1) ovenfor er løsning til differentialligningen

$$y'(x) + y(x) = r(x) \qquad (2)$$

Integrér differentialligning (2) numerisk ved at benytte Eulers forbedrede metode ("Improved Euler Method") under de samme betingelser som i punkt a). Hvilket af de to resultater for $y(1)$ er det mest nøjagtige?

Opgave 15 (V 04/05)

j	x_j	y_j
0	1	1.0877
1	2	0.4093
2	3	−0.5573

a) Tabellen viser sammenhørende værdier af x og $y(x)$, hvor $y_j = y(x_j)$. Benyt Newton's forlæns-difference interpolationsformel til at opstille polynomiet $p_2(x)$ gennem de tre punkter. Find den tilnærmede løsning $\tilde{x}_p$ til ligningen $y(x) = 0$ $(2 < x < 3)$ ved at antage $y(x) \simeq p_2(x)$. Opstil et udtryk for fejlen $\epsilon_2(x) = y(x) - p_2(x)$, når $y_3 = y(x = 4) = -1.1314$.

$y(x)$ opfylder følgende integralligning:

$$y(x) = r(x) + \int_0^x r(x-\tau)\, y(\tau) d\tau\,, \quad r(x) = e^{-x/2} \cos x \quad (x \geq 0)$$

b) Bestem den Laplace transformerede $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}$ og udregn $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$. Find den korrekte værdi af $y(\tilde{x}_p)$ og sammenlign resultatet med fejlvurderingen foretaget under punkt a).

Opgave 16 (V 05/06)

Funktionen $y = y(x)$ er løsningen til differentialligningen

$$y' = f(x, y) = y + \cos x\ ; \quad \text{med begyndelsesbetingelsen } y(0) = 0$$

a) Bestem den Laplace transformerede $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}$ og udregn $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

b) Benyt Eulers forbedrede metode ("Improved Euler Method") til at udregne en tilnærmet værdi $\tilde{y}(1)$ for funktionsværdien $y(1)$. Anvend en ækvidistant todeling af intervallet mellem $x = 0$ og 1, dvs. $h = 0.5$.

Benyttes i stedet intervallængden $h = 0.25$ er resultatet $\tilde{y}_{1/2}(1) = 1.4867$. Udnyt resultaterne for $\tilde{y}(1)$ og $\tilde{y}_{1/2}(1)$ til at vurdere fejlen $\epsilon_{1/2}$ på resultatet $\tilde{y}_{1/2}(1)$ og sammenlign med den reelle fejl.

Opgave 17 (V 97/98)

Bevægelsesligningen for en dæmpet harmonisk oscillator er:

$$y'' + 2y' + 5y = 5 \qquad ; \qquad t \geq 0$$

a) Find den Laplace transformerede $Y(s) = \mathfrak{L}\{y(t)\}$ og løsningen $y(t)$ for $t > 0$ udtrykt vha. parametrene a og b, hvor $a = y(0)$ og $b = y'(0)$.

b) Bestem begyndelsesbetingelserne, a og b, og angiv den tilhørende løsning $y(t)$ i følgende to tilfælde:

i) $y(0) = 0$ og $y(\frac{\pi}{4}) = 1$ ii) $y'(0) = 0$ og $y''(0) = 0$

Opgave 18 (S 98)

Bessel-funktionen af 0te orden $J_0(t)$ er løsning til differentialligningen:

$$ty'' + y' + ty = 0$$

med randbetingelsen $y(0) = J_0(0) = 1$.

a) En Laplace-transformation af denne anden ordens differentialligning fører til en første ordens differentialligning i s til bestemmelse af $Y(s) = \mathfrak{L}\{y(t)\}$. Opstil denne ligning og find dens generelle løsning $Y(s)$.

b) Vis, at hvis $f(t)$ er vilkårligt ofte differentiabel for $t \geq 0$ og $F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}$, så er

$$\lim_{s \to \infty} sF(s) = f(0)$$

ved at benytte en Taylor-rækkeudvikling af $f(t)$ i Laplace-integralet. Anvend dette resultat til at fastlægge integrationskonstanten i den generelle løsning $Y(s)$ under punkt a), således at $Y(s) = \mathfrak{L}\{J_0(t)\}$.

Opgave 19 (V 98/99)

Den elektriske strøm $i(t)$ gennem en modstand i serie med en spole beskrives ved ligningen ($t \geq 0$):

$$v(t) = R\,i(t) + L\,\frac{di(t)}{dt} \qquad , \qquad i(0) = 0$$

hvor den påtrykte spænding er:

$$v(t) = \begin{cases} V_0 \dfrac{t}{a} & , \quad 0 < t < a \\ V_0 & , \quad t > a \end{cases}$$

a) Bestem Laplace-transformen af $v(t)$: $V = V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$.

b) Find $I = I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}$ og strømmen $i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}$.

c) Bestem t-afhængigheden af $i(t)$ i området $0 < t \ll a$ og grænseværdien af $i(t)$ når $t \to \infty$

Opgave 20 (S 05)

Strømmen $i(t)$ i et elektrisk kredsløb med $L = R = 1$ bestemmes af

$$v(t) = i(t) + \frac{d\,i(t)}{dt}\,, \qquad v(t) = \sin t\,, \qquad i(0) = 0\,. \tag{1}$$

a) Find Laplace transformen af $i(t)$: $I = I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}$ og strømmen $i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}$ (for $t \geq 0$).

b) Spændingen over kredsløbet afbrydes til tiden $t = \pi$, dvs. $v(t)$ i (1) erstattes af $v(t) = [1 - u(t-\pi)]\sin t$, mens resten er uændret. Bestem $i(t)$ for $t \geq \pi$.
Hvad bliver resultatet, hvis spændingen afbrydes til et vilkårligt tidspunkt $t_0 > 0$ (argumentér for resultatet uden at foretage en detaljeret gennemregning)?

II. Sandsynlighedsregning og matematisk statistik

Opgave 21 (V 97/98)

a) 5 målinger af en kontinuert varierende størrelse giver følgende resultater:

$$31.1 \quad 35.2 \quad 34.7 \quad 33.0 \quad 30.5$$

Bestem "the 90% confidence interval" for middelværdien μ, når måleresultaterne antages beskrevet ved den normale fordeling.

b) Bestem sandsynligheden for i et kast med to (perfekte) terninger at slå en syver (hvor summen af antal øjne på de to terninger er 7). Hvad er sandsynligheden for at slå mindst 2 syvere i 4 kast? Bestem middelværdien μ og standardafvigelsen σ af X, hvor X er antallet af syvere slået i 4 kast.

Opgave 22 (S 98)

Addition (og/eller subtraktion) af n tal afrundet til r decimaler giver en stokastisk ophobning (Y) af afrundingsfejl:

$$Y(n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

hvor X_i er statistisk uafhængige variable.

a) De stokastiske variable X_i har alle den kontinuerte frekvensfunktion

$$f(x) = \begin{cases} c & -0.5\,a < x \leq 0.5\,a \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{1}$$

hvor $a = 10^{-r}$. Bestem konstanten c og beregn fordelingens varians σ_1^2. Fordelingen kan tilnærmelsesvis erstattes med en diskret fordeling:

$$f_1(-b) = f_1(b) = \tfrac{1}{2} \tag{2}$$

Bestem $b > 0$, således at fordelingerne (1) og (2) har samme varians. Vis, at hvis X_i antages at have den diskrete fordeling (2), så er frekvensfunktionen for $Y(n)$:

$$f_n(y_i) = \binom{n}{i}\frac{1}{2^n} \quad , \quad \text{hvor } y_i = (2i-n)b \text{ og } i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

b) For $n \geq n_0 \gg 1$ vil usikkerheden på resultatet af additionen af de n tal være så stor, at resultatet bør angives med $r-1$ snarere end med r decimaler. Udnyt "the central limit theorem" til at bestemme n_0 fastlagt ved følgende kriterium: For $n \geq n_0$ skal der være mere end 50% sandsynlighed for, at den numeriske afrundingsfejl er større end $5a$, dvs.

$$P\{-5a < Y(n = n_0) \leq 5a\} = \tfrac{1}{2} \qquad \text{Find } n_0.$$

Opgave 23 (S 99)

Antallet af radioaktive henfald i tidsintervallet t antages givet ved Poisson-fordelingen med middelværdien $\mu = \lambda t$, hvor henfaldskonstanten λ er uafhængig af tiden.

a) Hvad er sandsynligheden for 3 eller flere henfald i tidsintervallet $t = 2/\lambda$?

b) En tælling af henfald i et vist tidsinterval giver resultatet X. Bestem μ, således at $P(\mu - \Delta\mu \leq X \leq \mu + \Delta\mu) = 95\%$, når $\Delta\mu/\mu = 0.05$. Her er $\mu \gg 1$ og Poisson-fordelingen må tilnærmes med den tilsvarende kontinuerte fordelingsfunktion.

Hvis $p(t)$ er sandsynligheden for 0 henfald i tidsintervallet t vil $F(t) = P(T \leq t) = 1 - p(t)$ være fordelingsfunktionen for længderne af tidsintervallet mellem et henfald og det næste. T betegner den stokastiske variabel svarende til t, og $t \geq 0$ pr. definition (eller $F(t) = 0$ for $t \leq 0$).

c) Find $F(t)$ og den tilhørende frekvensfunktion $f(t)$, udtrykt ved λ og $t \geq 0$. Bestem den moment-genererende funktion $G(u) = \langle \exp(uT) \rangle$ for $u < \lambda$. Beregn middelværdien $\langle T \rangle$ og variansen $\sigma^2 = \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2$ for denne fordeling.

Opgave 24 (V 99/00)

Den stokastiske variabel X er defineret som det antal gange en terning skal kastes for at opnå en “sekser” (f.eks. $X = 2$ betyder 0 sekser i første kast og 1 sekser i andet kast).

a) Bestem frekvensfunktionen $f(x) = P(X = x)$ og fordelingsfunktionen $F(x) = P(X \leq x)$, hvor $x = 1,\ 2,\ 3, \ldots$. Vis, at $F(x) \to 1$ for $x \to \infty$. Udregn sandsynligheden $P(3 < X \leq 9)$.

b) Vis, at den moment-genererende funktion

$$G(t) = \langle e^{tX} \rangle = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} f(x) = \frac{e^t}{6 - 5\, e^t}$$

hvor $0 \leq t \ll 1$. Benyt relationen $\langle X^n \rangle = G^{(n)}(0)$ til at bestemme middelværdien $\langle X \rangle$ og variansen $\sigma^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$ for denne fordeling.

Hvad er sandsynligheden for ved højst tre kast med fire terninger at slå fire seksere, når man efter hvert kast beholder de seksere man har slået og kun kaster videre med de resterende terninger?

Opgave 25 (S 00)

Den stokastiske variabel $Y(n)$ er summen af n éncifrede tal

$$Y(n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

X_i er statistisk uafhængige og hver enkelt variabel antager en af værdierne $0, 1, 2, \cdots$, eller 9 med lige stor sandsynlighed.

a) Angiv frekvensfunktionen $f(x)$ for det enkelte X_i, og beregn den tilhørende middelværdi μ_x og standardafvigelse σ_x.
Bestem sandsynligheden $P(Y(n) \leq n)$, når $n = 1$, 2 og 3.

b) Angiv middelværdi μ_n og standardafvigelse σ_n af summen $Y(n)$ for vilkårlig heltallig værdi af $n \geq 1$. Opstil den tilnærmede frekvensfunktion $f_n(y)$ for $Y(n)$ i grænsen $n \gg 1$. Benyt denne tilnærmelse til at beregne 95% konfidensintervallet $\mathrm{CONF}\{\mu_n - k \leq y(n) \leq \mu_n + k\}$ for $n = 1000$.

Opgave 26 (V 00/01)

a) 5 målinger af en kontinuert stokastisk variabel X giver følgende resultater:

$$11.3 \qquad 9.2 \qquad 12.1 \qquad 8.5 \qquad 9.9$$

Bestem middelværdi $\overline{x}$ og standardafvigelse s af stikprøven. Angiv 90% konfidensintervallet for $\mu = \langle X \rangle$ bestemt ved denne stikprøve, når X antages at være normalfordelt.

b) En stikprøve på 100 målinger af X giver resultatet vist i tabellen:

x-interval	Antal målinger
$x < 7$	7
$7 < x < 8$	11
$8 < x < 9$	10
$9 < x < 10$	22
$10 < x < 11$	19
$11 < x < 12$	16
$12 < x < 13$	8
$13 < x$	7

Resultatet af denne stikprøve er $\overline{x} = 10.0$ og $s = 2.0$. Udfør en χ^2-test af hvorvidt X er beskrevet ved en normalfordeling, hvis middelværdi og varians sættes til at være lig de tilsvarende størrelser bestemt af stikprøven. Benyt et "significance level" $\alpha = 5\%$.

Opgave 27 (S 01)

En stikprøvemåling af Y som funktion af x giver resultaterne vist i tabellen. Det antages, at der ikke er nogen usikkerhed på målingen af x og at Y for fastholdt x er normal med middelværdien $\mu(x) = \kappa_0 + \kappa_1 x$ med en varians der er uafhængig af x.

x	y
1	0.42
2	0.98
3	1.58
4	1.92
5	2.36
6	3.03
7	3.44
8	3.91
9	4.35
10	4.84

a) Benyt "mindste kvadraters metode" til at bestemme den bedste rette linie $\overline{y} = k_0 + k_1 x$ gennem målepunkterne.

b) Find standardafvigelserne $s(k_0)$ og $s(k_1)$ på stikprøvebestemmelserne af k_0 og k_1. Bestem 95% konfidensintervallerne for κ_0, κ_1, samt $\overline{\mu}$. Den sidste størrelse er defineret som middelværdien af $\mu(x)$ for de x_i-værdier der indgår i stikprøven, $\sum_i \mu(x_i)/n$. Forholdet c mellem den halve længde af konfidensintervallet og standardafvigelsen er den samme i alle tre tilfælde. Kan stikprøven benyttes til at afvise hypotesen, at relationen mellem x og μ er $\mu = 0.5\,x$ (med et "signifikans niveau" $\alpha = 5\%$)?

Opgave 28 (V 01/02)

I tilfældige fordelinger af tal ≥ 1 over flere størrelsesordener vil sandsynligheden for, at første ciffer i de enkelte tal er k, have *Benford fordelingen* med frekvensfunktionen

$$f(k) = \log(k+1) - \log k \qquad ; \qquad k = 1, 2, \ldots, 9$$

og 0 ellers, hvor "log" betegner 10-tals logaritmefunktionen.

k	b_k
1	309
2	171
3	127
4	87
5	83
6	67
7	44
8	68
9	44

a) Bestem fordelingsfunktionen $F(x) = \sum_{k \leq x} f(k)$ for alle værdier af x. Hvad er sandsynligheden for at første ciffer er et lige tal? Find fordelingens middelværdi μ.

b) En stikprøve med $n = 1000$ tal giver resultatet vist i tabellen, hvor b_k er antallet af tal, der har k som første ciffer. Anvend en χ^2 test til at afgøre om stikprøven er i overensstemmelse med Benford fordelingen. Benyt et "significance level" $\alpha = 5\%$.

Opgave 29 (S 02)

De to stokastiske variable X og Y har begge en Poisson fordeling med middelværdierne $\langle X \rangle = \mu_1$ og $\langle Y \rangle = \mu_2$. De to variable antages at være statistisk uafhængige.

a) Find $P(Z = 3)$, hvor $Z = X + Y$, i det tilfælde at $\mu_1 = 2$ og $\mu_2 = 3$. Bestem middelværdien $\langle Z \rangle$ og variansen $\sigma^2 = \langle Z^2 \rangle - \langle Z \rangle^2$ i det generelle tilfælde (udtrykt ved μ_1 og μ_2).
Udregn en tilnærmet værdi for $P(Z = 3)$ ved at tilnærme Z's diskrete fordelingsfrekvens i $z = 3$ med normalfordelingstætheden, med samme middelværdi og varians, integreret fra 2.5 til 3.5 (når $\mu_1 = 2$ og $\mu_2 = 3$).

b) Besvar de samme spørgsmål som under punkt a) med den forskel at nu er $Z = XY$.
Kommentér: Hvilken fordeling har $Z = X + Y$, og har $Z = XY$ den tilsvarende fordeling?

Opgave 30 (V 02/03)

Der betragtes to forskellige, uafhængige stokastiske middelværdier ($\beta = 1,\ 2$)

$$\overline{X}_\beta = \frac{1}{n_\beta} \sum_{i=1}^{n_\beta} X_i(\beta) \quad ; \quad \text{samt differencen} \qquad Y = \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \qquad (1)$$

hvor $X_i(\beta)$ er normalfordelt med middelværdien μ_β og variansen σ^2 (variansen er uafhængig af β).

a) Hvilken fordeling har den stokastiske variabel Y? Bestem fordelingens middelværdi $\langle Y\rangle$ og varians $\sigma^2(y)$ udtrykt ved $n_1,\ n_2,\ \mu_1,\ \mu_2$, og σ.
En stikprøvemåling giver følgende resultat:

$$\begin{array}{llll} \beta = 1: & n_1 = 5\,, & \overline{x}_1 = 72.3\,, & s_1 = 5.1 \\ \beta = 2: & n_2 = 10\,, & \overline{x}_2 = 66.1\,, & s_2 = 3.8 \end{array} \qquad (2)$$

hvor s_β betegner stikprøvevurderingen af σ. Bestem 95% konfidensintervallerne for μ_1 og μ_2 ud fra stikprøven (2).

Den stokastiske variabel T i følgende udtryk har en Student's t-fordeling med $n_1 + n_2 - 2$ frihedsgrader (S_β er den stokastiske størrelse svarende til s_β):

$$T = \frac{Y - \langle Y\rangle}{\sigma(y)} \cdot \frac{\sigma}{S_y} \quad ; \quad S_y^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \qquad (3)$$

b) Find 95% konfidensintervallet for $\langle Y\rangle$ ud fra stikprøven (2). Kan stikprøven benyttes til at afvise en hypotese om at $\mu_1 = \mu_2$ med et "signifikans niveau" $\alpha = 5\%$? Hvilken fordeling har $(n_1 + n_2 - 2)S_y^2/\sigma^2$?

Opgave 31 (S 03)

En stikprøvemåling af Y som funktion af x giver resultaterne vist i tabellen. Der er ingen usikkerhed på målingen af x. For fastholdt x antages Y at have en normalfordeling med middelværdien $\mu(x) = \kappa_0 + \kappa_1 x$ og en varians, $\sigma^2(y)$, som er uafhængig af x.

x	y
1	0
2	1
3	3
4	6
5	11
6	16

a) Benyt "mindste-kvadraters-metode" til at bestemme den bedste rette linie $\overline{y} = k_0 + k_1 x$ gennem målepunkterne. Bestem $s(y)$, stikprøveværdien af standardafvigelsen på y.

b) Antages i stedet $\mu(x) = \kappa_0 + \kappa_1 x + \kappa_2 x^2$ fører mindste-kvadraters-metode til resultatet $\overline{y} = (7 - 27x + 20x^2)/35$. Bestem 95% konfidensintervallet for $\sigma(y)$, når regressionskurven antages lineær i x, og når hypotesen er at den er kvadratisk. Kan det afvises, at regressionskurven er lineær (med et "signifikans niveau" $\alpha = 5\%$)?

Opgave 32 (V 03/04)

Det stokastiske antal Y af biler, der passerer en bro, har en Poisson fordelingen med middelværdien $\mu = t\lambda$, hvor $\lambda = 2$ per minut og t er det tidsinterval der benyttes. Sandsynligheden for at der er én, to, eller tre personer i den enkelte bil er henholdsvis $p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.3$, og $p_3 = 0.1$, og X_1, X_2, og X_3 er de tilsvarende stokastiske antal af biler med henholdsvis én, to, eller tre personer, der passerer broen i tidsintervallet t, dvs. $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

a) Vis ved en omskrivning af følgende relation

$$P(X_1 = n) = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} p_1^n (1-p_1)^{m-n} P(Y = m)$$

at X_1 har en Poisson fordeling med middelværdien $\mu_1 = p_1\mu$. Opstil et stokastisk udtryk for antallet af personer Z, der passerer broen i de Y biler i tidsrummet t. Angiv middelværdi og varians af fordelingen for hver af de fem variable X_1, X_2, X_3, Y og Z, når t er ét minut.

b) Bestem sandsynligheden for, at der sammenlagt er præcis tre personer i de biler der passerer broen i løbet af ét minut. Find 95% konfidensintervallet (symmetrisk mht. middelværdien μ_z) for det antal personer z, som bilerne bringer over broen i løbet af én time.

Opgave 33 (S 04)

Det stokastiske antal $Y(n)$ er summen af øjne på n terninger, dvs.

$$Y(n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

hvor X_i er statistisk uafhængige variable, som hver for sig antager en af værdierne 1, 2, ..., 6 med lige stor sandsynlighed.

a) Angiv frekvensfunktionen $f(x)$ for det enkelte X_i, og beregn den tilhørende middelværdi μ og standardafvigelse σ. Bestem sandsynlighederne $P(Y(4)\!=\!4)$, $P(Y(4)\!=\!5)$, $P(Y(4)\!=\!6)$ og $P(6 < Y(4) \leq 21)$.

b) Bestem middelværdi μ_n og standardafvigelse σ_n af summen $Y(n)$ for vilkårlig heltallig værdi af $n \geq 1$. Opstil et tilnærmede udtryk for frekvensfunktionen $f_n(y)$ i grænsen $n \gg 1$. Udnyt denne tilnærmelse til at beregne 90% konfidensintervallet CONF$\{\mu_n - k < y(n) \leq \mu_n + k\}$ for $n = 100$.

Opgave 34 (V 04/05)

Levetiden T af en elektrisk komponent er en stokastisk variabel med fordelingsfunktionen

$$F(t) = 1 - e^{-t/\tau}, \qquad \text{hvor } \tau \text{ er en positiv konstant og } t \geq 0. \qquad (1)$$

a) Bestem sandsynlighedstætheden $f(t)$, middellevetiden $\mu = \langle T\rangle$, og variansen $\sigma^2 = \langle T^2\rangle - \langle T\rangle^2$ for denne fordeling. Find sandsynligheden $P(T > \tau)$. Bestem t_0 således at $P(0 < T < t_0) = 0.5$.

To elektriske komponenter forbindes enten i serie eller parallelt. Fordelingsfunktionerne for levetiden af de to kredsløb er henholdsvis

$$F_s(t) = 2\int_0^t \Big[\int_x^\infty f(x)f(y)dy\Big]dx, \qquad F_p(t) = 2\int_0^t \Big[\int_0^x f(x)f(y)dy\Big]dx \qquad (2)$$

idet det antages at levetiden af de to komponenter har samme fordelingsfunktion (1) og er statistisk uafhængige, $f(x,y) = f(y,x) = f(x)f(y)$.

b) Bestem $f_s(t)$, μ_s og σ_s^2 for det serieforbundne, og de samme størrelser, $f_p(t)$, μ_p og σ_p^2 for det paralleltforbundne kredsløb.

Opgave 35 (S 05)

Sandsynligheden for at en bestemt kabale går op (hændelsen A) er $P(A) = p$.

a) Opstil frekvensfunktionen $f(x)$ for at kabalen går op x gange i løbet af n spil, hvor $x = 0, 1, 2, \ldots, n$. Bestem sandsynligheden for hændelsen B, som betegner at kabalen går op 3 eller flere gange i løbet af 5 spil, når det antages at $p = 0.3$. Hændelsen C betegner den delmængde af B, hvor de spil der går op følger lige efter hinanden. Bestem den betingede sandsynlighed $P(C|B)$ når $p = 0.3$.

b) Opstil det tilnærmede udtryk for frekvensfunktionen $f(x)$ når $n \gg 1$, og benyt dette til at bestemme 95% konfidensintervallet for x (udtrykt ved n, p, og eventuelle konstanter). Udnyt dette resultat til at finde 95% konfidensintervallet for p bestemt ud fra et enkelt eksperiment, hvor $x = 30$ og $n = 100$.

Opgave 36 (V 05/06)

X_i er diskrete, uafhængige stokastiske variable ($i = 1, 2, \ldots, n$), som hver for sig antager værdien 1 med sandsynligheden $P(X_i = 1) = p$ og værdien 0 med sandsynligheden $P(X_i = 0) = q = 1 - p$. Vi skal betragte to afledte stokastiske variable, summen Y_n og produktet Z_n:

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \,, \qquad\qquad Z_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

a) Opstil frekvensfunktionerne for de tre forskellige stokastiske variable

$$f(x) = P(X_i = x), \qquad g(y) = P(Y_n = y), \qquad h(z) = P(Z_n = z)$$

b) Find middelværdierne $\langle X_i \rangle$, $\langle Y_n \rangle$ og $\langle Z_n \rangle$ og standardafvigelserne σ_x, σ_y og σ_z for de tre fordelinger, udtrykt ved p, q og n, hvor f.eks. $\sigma_x^2 = \langle X_i^2 \rangle - \langle X_i \rangle^2$.

Beregn sandsynlighederne $P(Y_n = 3)$ og $P(Y_n > 2)$ i tilfældet $p = 0.25$ og $n = 5$. Beregn, tilnærmelsesvis, $P(230 \le Y_n \le 270)$ når $n = 1000$ og $p = 0.25$.

III. Tensoranalyse

Opgave 37 (V 98/99)

Parameterfremstillingen for en cylinder med et elliptisk tværsnit er:

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = \mathbf{r}(\theta, z) = (2\cos\theta, \sin\theta, z)\,, \qquad \begin{cases} 0 \le \theta < 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

og θ $(= u^1)$ og z $(= u^2)$ benyttes som første og anden koordinat i et kurvelineært koordinatsystem på denne flade.

a) Find de to kovariante basisvektorer $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ og opstil den metriske tensors kovariante komponenter g_{ij} i en (2×2) matrix.

b) Bestem den metriske tensors kontravariante komponenter g^{ij}, de kontravariante basisvektorer $\mathbf{e}^1$ og $\mathbf{e}^2$, og de 8 komponenter af Christoffel symbolet af anden art Γ^k_{ij}.

c) Beregn divergensen af $\mathbf{r}(\theta, z)$:

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = r^i_{;i} = \frac{\partial r^i}{\partial u^i} + \Gamma^i_{ki} r^k$$

hvor r^i er de kontravariante komponenter af $\mathbf{r}$.

Opgave 38 (S 99)

De parabolske cylinderkoordinater betegnes: $\alpha = u^1$, $\beta = u^2$ og $\gamma = u^3$. Stedvektoren $\mathbf{r} = (x, y, z) = \mathbf{r}(\alpha, \beta, \gamma)$ i et kartesiansk koordinatsystem bestemmes ved

$$x = \tfrac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2)$$
$$y = \alpha\beta$$
$$z = -\gamma$$

a) Bestem de kovariante basisvektorer $\mathbf{e}_i$ i det parabolske koordinatsystem. Opstil den metriske tensors kovariante, g_{ij}, og kontravariante komponenter, g^{ij}, som (3×3) matricer. Find $\sqrt{g}$, hvor g er determinanten af $\{g_{ij}\}$-matricen.

Vektoren $\mathbf{v}$ defineres som gradienten af funktionen $f(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2$, dvs.

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}^i = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial u^i}\mathbf{e}^i$$

b) Bestem $\mathbf{v}$'s kovariante, v_i, og kontravariante, v^i, komponenter. Find $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_i v^i$ og $\nabla \cdot \mathbf{v}$ (divergensen af $\mathbf{v}$). Udregn de samme to størrelser i det kartesianske koordinatsystem. Sammenlign og kommentér resultaterne af de to regninger.

Opgave 39 (V 99/00)

Et kurvelineært koordinatsystem i to dimensioner med første koordinaten $u^1 = \alpha$ og anden koordinaten $u^2 = \beta$ er defineret ud fra:

$$\mathbf{r} = (x, y) = \mathbf{r}(\alpha, \beta) = (\alpha\beta, \alpha + \beta) \qquad\qquad (\alpha \neq \beta)$$

a) Find de to kovariante basisvektorer $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ og opstil den metriske tensors kovariante komponenter g_{ij} i en (2×2) matrix. Bestem de kontravariante basisvektorer $\mathbf{e}^1$ og $\mathbf{e}^2$ (f.eks. ved at benytte ortogonalitetsbetingelsen $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$), og de 8 komponenter af Christoffel symbolet af anden art Γ^k_{ij}.

b) Beregn divergensen: $\nabla \cdot \mathbf{r} = r^i_{;i} = \dfrac{\partial r^i}{\partial u^i} + \Gamma^i_{ki} r^k$, hvor r^i er de kontravariante komponenter af $\mathbf{r} = (\alpha\beta, \alpha + \beta)$.

   $\mathbf{T}$ er en anden ordens tensor defineret som det ydre produkt af vektorerne $\mathbf{a} = (1, 1)$ og $\mathbf{r} = (x, y)$, dvs. $\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{r}$. Opstil $\mathbf{T}$'s kontravariante komponenter i det kurvelineære koordinatsystem, T^{ij}, som en (2×2) matrix.

Opgave 40 (S 00)

Et todimensionalt kurvelineært koordinatsystem på en kugle med fastholdt radius a er defineret ved

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = \mathbf{r}(\theta, \phi) = (a \sin\theta \cos\phi, a \sin\theta \sin\phi, a \cos\theta) \qquad\qquad (a > 0)$$

hvor første koordinaten $u^1 = \theta$ og anden koordinaten $u^2 = \phi$.

a) Find de to kovariante basisvektorer $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ og opstil den metriske tensors kovariante komponenter g_{ij} i en (2×2) matrix. Vis generelt, at de kontravariante basisvektorer i det todimensionale tilfælde er

$$\mathbf{e}^1 = [(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2]/g \quad ; \quad \mathbf{e}^2 = [(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1]/g$$

   hvor $g = |g_{ij}|$ er determinanten af g_{ij}-matricen. Bestem de kontravariante basisvektorer i kugle-koordinatsystemet.

b) Bestem de otte komponenter af Christoffel symbolet af 2. art $\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\}$.

   Beregn *kurvatur invarianten* $R = R^i_i = g^{ij} R_{ij}$, hvor komponenterne af *den symmetriske Ricci tensor* er $R_{22} = -\sin^2\theta$, $R_{12} = R_{21} = 0$ og

$$R_{11} = \frac{\partial}{\partial u^1}\left\{ {k \atop 1k} \right\} - \frac{\partial}{\partial u^k}\left\{ {k \atop 11} \right\} + \left\{ {m \atop k1} \right\}\left\{ {k \atop m1} \right\} - \left\{ {m \atop 11} \right\}\left\{ {k \atop mk} \right\}$$

Opgave 41 (V 00/01)

Et todimensionalt kurvelineært koordinatsystem, med første koordinaten $u^1 = \theta$ og anden koordinaten $u^2 = \phi$, er defineret ved

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{r}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} (a + b\sin\theta)\cos\phi \\ (a + b\sin\theta)\sin\phi \\ b\cos\theta \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \begin{cases} 0 \le \theta < 2\pi \\ 0 \le \phi < 2\pi \end{cases}$$

hvor a og b er fastholdte parametre, $a > b > 0$. Skitsér eller beskriv overfladen givet ved denne parameterfremstilling.

a) Find de to kovariante basisvektorer $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ og opstil den metriske tensors kovariante komponenter g_{ij} i en (2×2) matrix. Benyt disse resultater til at bestemme den kontravariante metriske tensor g^{ij} og de kontravariante basisvektorer $\mathbf{e}^1$ og $\mathbf{e}^2$.

b) Opstil det differentielle "volumenelement" (arealelement) og beregn det totale areal af overfladen.
Udregnes komponenterne af Christoffel symbolet af 2. art $\Gamma^k_{ij} = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}$ fås

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{a + b\sin\theta}{b}\cos\theta \qquad ; \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{b\cos\theta}{a + b\sin\theta}$$

mens de resterende er 0. Tensoren $\mathbf{T}$ er defineret som det ydre produkt af $\mathbf{r}$ med sig selv, $\mathbf{T} = \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}$. Bestem de otte kovariante komposanter $T_{ij;k}$ af den kovariante afledede af $\mathbf{T}$.

Opgave 42 (S 01)

Det cylindriske og det sfæriske koordinatsystem bestemmes henholdsvis af koordinatfunktionerne $(u^1, u^2, u^3) = (\rho, \phi, z)$ og $(v^1, v^2, v^3) = (r, \theta, \psi)$, hvor:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\psi \\ r\sin\theta\sin\psi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{matrix} 0 \le \phi < 2\pi \\ 0 \le \psi < 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} \rho \ge 0 \\ \\ r \ge 0 \end{matrix}$$

$\mathbf{S}$ er en tensor defineret som det ydre produkt $\mathbf{S} = \mathbf{r} \otimes \mathbf{k}$, hvor $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$\overline{\overline{U}}$ betegner 3×3 matricen med elementerne $[\overline{\overline{U}}]_{ij} = \dfrac{\partial u^i}{\partial v^j}$.

a) Opskriv de kovariante basisvektorer i det cylindriske u-koordinatsystem. Bestem matricen $\overline{\overline{S}}$, hvis elementer er de kovariante komponenter af $\mathbf{S} = \mathbf{r} \otimes \mathbf{k}$ i u-koordinatsystemet: $[\overline{\overline{S}}]_{ij} = S_{ij}$.
Find udtrykkene for (ρ, ϕ, z) og matricen $\overline{\overline{U}}$ som funktioner af (r, θ, ψ).

Benyttes en matrix- i stedet for en tensornotation, kan transformationen af en 2. ordens tensor $\mathbf{T}$'s komponenter fra u- til v-koordinatsystemet skrives:

$$\overline{\overline{T}}' = \overline{\overline{U}}^t\, \overline{\overline{T}}\, \overline{\overline{U}} \qquad ; \qquad \overline{\overline{\mathcal{T}}}' = \overline{\overline{V}}\, \overline{\overline{\mathcal{T}}}\, \overline{\overline{V}}^t \tag{1}$$

hvor det øvre index t betegner den transponerede matrix. $\overline{\overline{T}}$ og $\overline{\overline{T}}'$ er $\mathbf{T}$'s kovariante komponenter i henholdsvis u- og v-koordinatsystemet. $\overline{\overline{\mathfrak{T}}}$ og $\overline{\overline{\mathfrak{T}}}'$ er de tilsvarende kontravariante komponenter.

b) Udregn **S**'s kovariante komponenter i v-koordinatsystemet, $\overline{\overline{S}}'$, som funktion af (r, θ, ψ). Eftervis (1) og herunder at $\overline{\overline{V}} = \overline{\overline{U}}^{-1}$.

Opgave 43 (V 01/02)

Et todimensionalt kurvelineært koordinatsystem på en omdrejningshyperboloide er defineret ved:

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = \mathbf{r}(\theta, z) = (\cos\theta - z\sin\theta\,,\, \sin\theta + z\cos\theta\,,\, z)\,, \qquad \begin{cases} 0 \le \theta < 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

hvor første koordinaten $u^1 = \theta$ og anden koordinaten $u^2 = z$.

a) Find de to kovariante basisvektorer $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ og opstil den metriske tensors kovariante komponenter g_{ij} i en (2×2) matrix. Bestem g, som er determinanten af $\{g_{ij}\}$-matricen, og de kontravariante komponenter g^{ij} af den metriske tensor.

Udregnes den *symmetriske Ricci* tensor fås, at $R^{ij} = \dfrac{1}{g^2}\, g^{ij}$.

b) Find *kurvatur invarianten* $R = g_{ij}R^{ij}$ og bestem overfladens krumning $K = -R/2$ i grænsen $|z| \to \infty$. Udnyt at divergensen af den metriske tensor $g^{ij}_{;j} = 0$ til at vise, at $R^{ij}_{;j} = g^{ij}\,\dfrac{\partial(1/g^2)}{\partial u^j}$. Benyt dette resultat til at eftervise relationen
$$R_{;k} = 2\, g_{ki} R^{ij}_{;j}$$

Opgave 44 (S 02)

Parameterfremstillingen for en cylinder med et elliptisk tværsnit er:

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = \mathbf{r}(\theta, z) = (a\cos\theta, b\sin\theta, z)\,, \qquad \begin{cases} 0 \le \theta < 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

og θ $(= u^1)$ og z $(= u^2)$ benyttes som første og anden koordinat i et kurvelineært koordinatsystem på denne flade. Den geodætiske kurve på cylinderoverfladen med startpunkt i $(u^1, u^2) = (\theta_0, z_0)$ er

$$\mathbf{r}_g(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta, z(\theta))\,; \quad z(\theta) = z_0 + c\, I(\theta)\,; \quad I(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta')d\theta' \quad (1)$$

Her er $f(\theta) = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$, og c fastlægges af randbetingelserne.

a) Find de to kovariante basisvektorer $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ og opstil udtrykket for kvadratet på den differentielle buelængde, $(ds)^2$. Vis at (1) medfører, at kvadratet på buelængden bliver $s^2 = s^2(\theta) = (1 + c^2)I^2(\theta)$.

b) Verificér at udtrykket (1) for den geodætiske kurve opfylder ligningerne:

$$\frac{d^2u^i}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt} = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}}\frac{du^i}{dt} \;; \quad \dot{s} = \frac{ds}{dt} \;; \quad \ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

I det foreliggende tilfælde er $t \equiv \theta$, og $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} = f'(\theta)/f(\theta)$ er det eneste af de 8 Christoffel symboler af 2. art der er $\neq 0$. Bestem den geodætiske afstand mellem punkterne $(\theta_0, z_0) = (0, 0)$ og $(\theta_1, z_1) = (\pi, 1)$ når $a = 2$ og $b = 1$, i hvilket tilfælde $I(\pi) = 4.844$.

Opgave 45 (V 02/03)

Et tredimensionalt kurvelineært koordinatsystem (u^1, u^2, u^3) på overfladen af en kugle i fire dimensioner er defineret ved:

$$\mathbf{r} = (x, y, z, w) = A(\cos\phi \sin\theta \sin\psi,\ \sin\phi \sin\theta \sin\psi,\ \cos\theta \sin\psi,\ \cos\psi) \quad (1a)$$

Kuglens radius A er en positiv konstant og koordinaterne er $u^1 = \phi$, $u^2 = \theta$, $u^3 = \psi$, hvor

$$0 \leq \phi < 2\pi \quad ; \quad 0 \leq \theta < \pi \quad ; \quad 0 \leq \psi < \pi \qquad (1b)$$

a) Beskriv overfladen for en bestemt fastholdt værdi af 4. koordinaten ($\psi = \psi_0$). Bestem overfladens tre kovariante basisvektorer $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$. Opstil den metriske tensors kovariante komponenter g_{ij} i en (3×3) matrix.

b) Opstil det differentielle volumenelement dV for overfladen og beregn dens totale volumen. Den symmetriske Ricci tensor kan udregnes til at være $R_{ij} = -(2/A^2)g_{ij}$. Find kurvatur invarianten $R = g^{ij}R_{ij}$. Hvilken relation er der mellem en vilkårlig vektor $\mathbf{v}$, som tilhører overfladen, og stedvektoren $\mathbf{r}$ i det firedimensionale kartesianske koordinatsystem?

Opgave 46 (S 03)

Et todimensionalt kurvelineært koordinatsystem, med første koordinaten $u^1 = t$ og anden koordinaten $u^2 = \theta$, er defineret ved *vindelfladen*

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{r}(t, \theta) = \begin{pmatrix} t\cos\theta \\ t\sin\theta \\ k\,\theta \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \begin{cases} -\infty < t < \infty \\ -\infty < \theta < \infty \end{cases}$$

hvor k er en konstant ($k \neq 0$).

a) Find de to kovariante basisvektorer $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ og opstil den metriske tensors kovariante komponenter g_{ij} i en (2×2) matrix. Benyt disse resultater til at bestemme den kontravariante metriske tensor g^{ij} og de kontravariante basisvektorer $\mathbf{e}^1$ og $\mathbf{e}^2$.

b) Bestem de otte komponenter af Christoffel symbolet af 2. art $\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\}$.
Den symmetriske Ricci tensor har komponenterne

$$R_{11} = \frac{k^2}{(t^2+k^2)^2}\,; \qquad R_{12} = R_{21} = 0\,; \qquad R_{22} = \frac{k^2}{t^2+k^2}$$

Udregn komponenten $R_{22;1}$ af den kovariante afledede $R_{ij;k}$ af den symmetriske Ricci tensor.

Opgave 47 (V 03/04)

Et todimensionalt kurvelineært koordinatsystem på en *omdrejningsparaboloide* er defineret ved (a er en positiv konstant):

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{r}(\phi, z) = \begin{pmatrix} (a+z^2)\cos\phi \\ (a+z^2)\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \begin{cases} 0 \le \phi < 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

hvor første koordinaten er $u^1 = \phi$ og anden koordinaten er $u^2 = z$.

a) Find de to kovariante basisvektorer $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ og opstil den metriske tensors kovariante komponenter g_{ij} i en (2×2) matrix. Benyt disse resultater til at bestemme den kontravariante metriske tensor g^{ij} og de kontravariante basisvektorer $\mathbf{e}^1$ og $\mathbf{e}^2$.

b) Bestem de otte komponenter af Christoffel symbolet af 2. art $\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\}$, og beregn de to komponenter af $\left\{ {k \atop ik} \right\}$. Den symmetriske Ricci tensor har komponenterne:

$$R_{11} = \frac{2(a+z^2)}{(1+4z^2)^2}\,; \quad R_{12} = R_{21} = 0\,; \quad R_{22} = \frac{2}{(a+z^2)(1+4z^2)}$$

Den Gaussiske krumning af overfladen er $K = K(\phi, z) = -\frac{1}{2}R$, hvor kurvatur-invarianten $R = g^{ij}R_{ij}$. Udled et udtryk for K og bestem K i grænserne $z \to 0$ og $z \to \pm\infty$.

Opgave 48 (S 04)

Et todimensionalt kurvelineært koordinatsystem på en omdrejningsflade har første koordinaten $u^1 = \phi$ og anden koordinaten $u^2 = z$, hvor

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{r}(\phi, z) = \begin{pmatrix} e^{-z}\cos\phi \\ e^{-z}\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \begin{cases} 0 \le \phi < 2\pi \\ 0 \le z < \infty \end{cases}$$

Fire af komponenterne af Christoffel symbolet af 2. art er 0, mens

$$\left\{ {2 \atop 11} \right\} = -\left\{ {2 \atop 22} \right\} = \frac{1}{1+e^{2z}}\,; \qquad \left\{ {1 \atop 12} \right\} = \left\{ {1 \atop 21} \right\} = -1\,; \qquad \left\{ {k \atop ij} \right\} = \Gamma^k_{ij}$$

En geodætisk kurve på overfladen opfylder differentialligningerne:

$$\frac{d^2u^i}{dt^2} + \left\{ {i \atop jk} \right\} \frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt} = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}}\frac{du^i}{dt}\,; \qquad \dot{s} = \frac{ds}{dt}\,; \qquad \ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

a) Opstil udtrykkene for kvadratet på den differentielle buelængde $(ds)^2$ og for det differentielle "volumenelement" (arealelement) dA.

b) Beregn det totale areal af omdrejningsfladen.
Eftervis at $(u^1, u^2) = (\phi(t), z(t)) = (\phi_0, t)$ fremstiller en geodætisk kurve.
Opstil et integraludtryk for den geodætiske afstand mellem punkterne $(\phi, z) = (0, 0)$ og $(0, T)$, og bestem en tilnærmet værdi for denne afstand, når det antages at $T \gg 1$.

Opgave 49 (V 04/05)

Et tredimensionalt kurvelineært koordinatsystem på en firedimensional cylinderoverflade er defineret ved:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{r}(w, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \\ w \end{pmatrix} \quad ; \qquad \left\{ \begin{array}{c} -\infty < w < \infty \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \phi < 2\pi \end{array} \right.$$

hvor de tre koordinater er $u^1 = w$, $u^2 = \theta$ og $u^3 = \phi$.

a) Find de tre kovariante basisvektorer $\mathbf{e}_i$. Opstil den metriske tensors kovariante komponenter g_{ij} i en (3×3) matrix, og bestem $g = \det\{g_{ij}\}$. Beregn volumenet af den totale "cylinderoverflade" når $|w| \le W$.

b) Ud af de 27 Christoffel symboler af 2. art, $\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\}$, er kun $\left\{ {2 \atop 33} \right\} = -\cos\theta\sin\theta$, $\left\{ {3 \atop 23} \right\}$ og $\left\{ {3 \atop 32} \right\} \neq 0$. Benyt at $\left\{ {j \atop ij} \right\} = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial\sqrt{g}}{\partial u^i}$ til at bestemme de to sidste Christoffel symboler.

Vis at kurven med parameterfremstillingen:

$$w = w(t) = a_1 t + a_2, \quad \theta = \theta(t) = b_1 t + b_2, \quad \phi = \phi(t) = c \tag{1}$$

opfylder ligningerne for en geodætisk kurve, når a_i, b_i og c er konstanter. Bestem et udtryk for den geodætiske afstand mellem punkterne $(w, \theta, \phi) = (w_0, \theta_0, 0)$ og $(w_1, \theta_1, 0)$.

Opgave 50 (S 05)

Et todimensionalt kurvelineart koordinatsystem på en omdrejningsflade har første koordinaten $u^1 = \phi$ og anden koordinaten $u^2 = t$ og er fastlagt ved

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{r}(\phi, t) = \begin{pmatrix} f(t)\cos\phi \\ f(t)\sin\phi \\ t \end{pmatrix}, \qquad \left\{ \begin{array}{c} 0 \le \phi < 2\pi \\ -\infty < t < \infty \end{array} \right.$$

hvor $f(t)$ er en generel funktion af t.

a) Find de to kovariante basisvektorer $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ og opstil den metriske tensors kovariante komponenter g_{ij} i en (2×2) matrix (udtrykt ved $f(t)$ og dens afledede). Benyt disse resultater til at bestemme den kontravariante metriske tensor g^{ij} og de kontravariante basisvektorer $\mathbf{e}^1$ og $\mathbf{e}^2$.

b) Beregn de fire Christoffel symboler af 2. art: $\Gamma^i_{12} = \left\{ {i \atop 12} \right\}$ og $\Gamma^i_{21} = \left\{ {i \atop 21} \right\}$.
De kontravariante komponenter af den symmetriske Ricci tensor er:

$$R^{ij} = g^{ij} F(t)\,, \quad \text{hvor} \quad F(t) = \frac{f''(t)}{f(t)\{1 + [f'(t)]^2\}^2}\,.$$

Bestem kurvatur-invarianten $R = g_{ij} R^{ij}$. Find krumningen $K(t) = -\frac{1}{2}\, R(t)$ for $t = 0$ i det tilfælde, hvor $f(t) = 1 + \frac{1}{2}\, t^2$.
Relationen $g^{ij}_{\ ;j} = 0$ betyder, at den kovariante afledede $R^{ij}_{\ ;j} = g^{ij} \dfrac{\partial F(t)}{\partial u^j}$.
Benyt dette til at eftervise, at $R_{;k} = 2\, g_{ki} R^{ij}_{\ ;j}$ for et generelt $f(t)$.

Opgave 51 (V 05/06)

Et todimensionalt kurvelineært koordinatsystem, med første koordinaten $u^1 = t$ og anden koordinaten $u^2 = \theta$, er defineret på omdrejningsfladen:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{r}(t, \theta) = \begin{pmatrix} t\ \cos\theta \\ t\ \sin\theta \\ \frac{1}{2} t^2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \left\{ \begin{array}{l} 0 \le t < \infty \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{array} \right.$$

a) Find de to kovariante basisvektorer $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ og opstil den metriske tensors kovariante komponenter g_{ij} i en (2×2) matrix. Benyt disse resultater til at bestemme den kontravariante metriske tensor g^{ij} og de kontravariante basisvektorer $\mathbf{e}^1$ og $\mathbf{e}^2$.

b) Opstil udtrykket for det differentielle “volumenelement” (arealelement) dA, og beregn arealet af den del af overfladen, hvor $0 \le t \le 1$.
Bestem de otte komponenter af Christoffel symbolet af 2. art $\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\}$, og beregn de to komponenter af $\left\{ {k \atop ik} \right\}$. Find kurvatur-invarianten $R = R^i_i = g^{ij} R_{ij}$, idet komponenterne af den symmetriske Ricci tensor er

$$R_{11} = -\frac{1}{(1 + t^2)^2}\;, \qquad R_{12} = R_{21} = 0\;, \qquad R_{22} = -\frac{t^2}{(1 + t^2)^2}\,.$$

IV. Gruppeteori

Opgave 52 (S 98)

Quaternion-gruppen har ordenen 8:

$$Q = \{q_1,\, q_2, \ldots,\, q_8\} = \{1,\, -1,\, i,\, -i,\, j,\, -j,\, k,\, -k\}$$

og kompositionsreglen er multiplikation, hvor specielt

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

samt

$$\begin{array}{ccccc} ij = k & ; & ki = j & ; & jk = i \\ ji = -k & ; & ik = -j & ; & kj = -i \end{array}$$

a) Angiv de inverse elementer ved fx at opstille $Q^{-1} = \{q_1^{-1},\, q_2^{-1}, \ldots,\, q_8^{-1}\}$. Hvad er ordenen af de forskellige elementer? Bestem Q's konjugationsklasser.

b) Find alle Q's egentlige undergrupper. Hvilke af disse undergrupper er invariante? Angiv antallet af ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer af Q, og bestem disse repræsentationers grader. Opstil Q's karaktertavle (anfør argumenterne for de vigtigste trin i opstillingen af tavlen).

Opgave 53 (V 98/99)

Gruppen G har ordenen 8 og kan repræsenteres ved følgende 8 matricer:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Opstil Gs gruppetavle (Cayley-tavle).

b) Angiv de forskellige elementers orden. Bestem de 3 forskellige undergrupper af ordenen 4 og angiv hvilke af disse, der er isomorfe med enten den cykliske gruppe af 4. orden, $\mathcal{C}_4$, eller med Kleins fire-gruppe, $\mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{C}_2$.

c) Vis, at A_1 og A_2 tilhører samme konjugationsklasse og at denne klasse kun indeholder disse to elementer.

   Eftervis, at de 8 matricer ovenfor er unitære og at repræsentationen er irreducibel. Angiv de forskellige elementers karakterer i denne repræsentation.

Opgave 54 (S 99)

Gruppen G har ordenen 10: $G = \{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}$,

og der gælder følgende kompositionsregler:

$$a^i a^j = a^{i+j} \qquad a^i b_j = b_{2i+j}$$
$$b_i a^j = b_{i+3j} \qquad b_i b_j = a^{-2i+2j}$$

dvs. de sædvanlige potensregneregler for a, hvor $a^5 = e$ (det neutrale element). Desuden benyttes $b_{i+5p} = b_i$, hvor p er et helt tal.

a) Bestem de forskellige elementers orden.
   Udregn de 4 konjugationer:

$$a^{-p} a^q a^p \qquad b_p^{-1} a^q b_p \qquad a^{-p} b_q a^p \qquad b_p^{-1} b_q b_p$$

   Bestem gruppen G's konjugationsklasser.

b) Angiv antallet af irreducible repræsentationer af G, og bestem disse repræsentationers grader. Opstil gruppens karaktertavle (giv argumenterne for de vigtigste trin i opstillingen af tavlen).

Opgave 55 (V 99/00)

Gruppen $G = \{g_1,\ g_2, \ldots,\ g_6\}$ af ordenen 6 har kompositionsreglen:

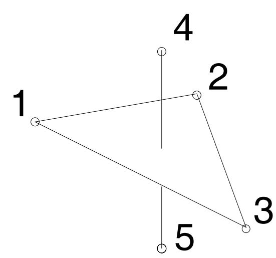
$$g_i g_j = g_k, \text{ hvor } k = i \cdot j - 7n = 1,\ 2\ , \ldots,\ 6 \text{ og } n \text{ er et helt tal}$$

dvs. $k = i \cdot j$ modulus 7.

a) Opstil Gs gruppetavle (Cayley-tavle). Angiv det neutrale element e, de inverse elementer g_i^{-1}, og find ordenen af de forskellige elementer. Giv et argument for at gruppen er isomorf med den cykliske gruppe af 6. orden. Bestem gruppens invariante (ikke-trivielle) undergrupper, og vis at G er isomorf med det direkte produkt af to af dens undergrupper.

b) Bestem antallet af konjugationsklasser, antallet af irreducible repræsentationer, og repræsentationernes grader. Opstil alle de forskellige irreducible repræsentationer af gruppen, og angiv hvilke af disse der er tro repræsentationer.

Opgave 56 (S 00)



Diedergruppen D_3 er gruppen af transformationer, der fører en ligesidet trekant over i sig selv, og den er isomorf med den symmetriske gruppe S_3, i.e.
$D_3 = \{e,\ a,\ b,\ c,\ d,\ f\} \equiv \{(1), (123), (132), (23), (13), (12)\}$, hvor de tilsvarende billedelementer i S_3 er angivet ved cykler. Der indføres to punkter, nummereret 4 og 5, symmetrisk placeret over og under trekantens midtpunkt. Den tilsvar-

ende transformationsgruppe $G = D_{3h}$ indeholder udover elementerne i D_3 også elementet m, som angiver en spejling i trekantens plan, samt alle sammensætningerne $ma = A$, $mb = B, \dots, mf = F$. Indføres betegnelserne $D_2 = \{e, m\} \equiv S_2 = \{(1), (45)\}$ så er G isomorf med det direkte produkt af D_2 og D_3, eller $G = D_2 D_3 \equiv S_2 S_3$.

a) Bestem ordenen af hver af de 12 elementer i G (udnyt eventuelt isomorfien mellem G og $S_2 S_3$). Bestem det inverse element til hvert enkelt element i G. Vis at m kommuterer med et vilkårligt element $g \in G$. Bestem G's konjugationsklasser.

b) Bestem antallet af ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer af G og find repræsentationernes grader. Opstil karaktertavlen for alle de irreducible repræsentationer af G som har dimensionen 1.

   Vis at $D_3 = \{e, a, b\}\{e, c\}$. Betyder denne relation, at D_3 er isomorf med det direkte produkt af disse to undergrupper?

Opgave 57 (V 00/01)

G er defineret som følgende mængde af 2×2 matricer:

$$G = \{[a, b] \mid a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}\} \qquad ; \qquad [a, b] \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

hvor $\mathbb{R}$ betegner mængden af alle reelle tal.

a) Vis at G med matrixmultiplikation som kompositionsregel udgør en gruppe. Er gruppen Abelsk?

A og B betegner følgende delmængder:

$$A = \{[a, 0] \mid a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0\} \qquad ; \qquad B = \{[1, b] \mid b \in \mathbb{R}\}$$

b) Vis at A og B er undergrupper i G, og at de begge er invariante (normale). Afgør om gruppen G er isomorf med det direkte produkt af A og B, $G = A \otimes B$. Beskriv de to kvotientgrupper $G|A$ og $G|B$.

Opgave 58 (S 01)

Der er to forskellige grupper af 9. orden: $\mathcal{C}_9$ og $G_9 \equiv \mathcal{C}_3 \otimes \mathcal{C}_3$, hvor $\mathcal{C}_n$ betegner den cykliske gruppe af $n$te orden. To cykliske undergrupper af 3. orden i G_9 betegnes $G_a = \{e,\ a,\ a^2\}$ og $G_b = \{e,\ b,\ b^2\}$, hvor e er det neutrale element.

a) Angiv elementernes orden i $\mathcal{C}_9 = \{c,\ c^2, \dots,\ c^8,\ c^9 = e\}$.
   Giv et argument for at G_9 må være Abelsk og dermed $ab = ba$. Opskriv gruppeelementerne i $G_9 = G_a G_b$ udtrykt ved hjælp af a, b (og e). Angiv ordenen af de forskellige elementer i G_9.

b) Bestem alle de egentlige undergrupper i G_9 og angiv om de er invariante. Opstil alle ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer af gruppen G_9.

Opgave 59 (V 01/02)

De to grupper $\mathcal{C}_3(x)$ og $\mathcal{C}_4(y)$ er cykliske af henholdsvis 3. og 4. orden, dvs.

$$\mathcal{C}_3(x) = \{e, x, x^2\} \quad (x^3 = e) \qquad ; \qquad \mathcal{C}_4(y) = \{e, y, y^2, y^3\} \quad (y^4 = e)$$

Gruppen $G_{12} = \mathcal{C}_3(x)\mathcal{C}_4(y) = \{e, x, x^2, y, xy, x^2y, y^2, xy^2, x^2y^2, y^3, xy^3, x^2y^3\}$ konstrueres ved at supplere den almindelige multiplikation i de to undergrupper med følgende regneregel:

$$yx = x^{-1}y = x^2y$$

a) Vis at $yx^2 = xy$ og at elementet y^2 kommuterer med alle andre elementer i G_{12}. Angiv ordenen af de forskellige elementer i G_{12}. Bestem gruppens konjugationsklasser.

Følgende to matricer indføres:

$$\overline{\overline{X}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \overline{\overline{Y}} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (i^2 = -1)$$

b) Vis at afbildningen $\overline{\overline{f}}(x^p y^q) = \overline{\overline{X}}^p \overline{\overline{Y}}^q$ kan benyttes som en repræsentation af G_{12}. Er repræsentationen tro og er den unitær? Hvad er karakteren af de forskellige elementer i denne repræsentation?

Opgave 60 (S 02)

To af elementerne i gruppen G, a og b, er repræsenteret ved følgende to matricer:

$$\boldsymbol{f}(a) = \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \; ; \qquad \boldsymbol{f}(b) = \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \left(i = \sqrt{-1}\right)$$

og antallet af elementer i G er lig antallet af forskellige matricer, der kan dannes ud fra $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$ ved matrixmultiplikation.

a) Bestem G's orden og opstil alle elementer i G. Angiv orden og repræsentationsmatrix for ethvert af elementerne i G. Er gruppen Abelsk? Find alle invariante undergrupper i G.

b) Gruppen G er isomorf med det direkte produkt af to af dens undergrupper. Bestem én af mulighederne for dette produkt.
Er repræsentationen givet ved afbildningen $\boldsymbol{f}$ irreducibel? Bestem alle éndimensionale repræsentationer af gruppen. Hvilken sammenhæng er der mellem $\boldsymbol{f}$ repræsentationen og de éndimensionale repræsentationer?

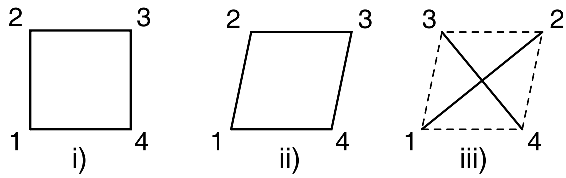
Opgave 61 (V 02/03)

To undergrupper i gruppen G er $G_a \equiv \mathcal{C}_2$ og $G_b \equiv \mathcal{C}_6$ som begge er cykliske af henholdsvis 2. og 6. orden. Det neutrale element i G betegnes e og frembringerelementet i G_a og i G_b betegnes respektivt a og b. Gruppen $G \equiv G_a \otimes G_b$ er isomorf med det direkte produkt af G_a og G_b.

a) Hvad er gruppen G's orden? Er G Abelsk (begrund svaret)? Opstil alle elementerne i G udtrykt ved a, b og e. Bestem ordenen af de forskellige elementer. Opstil alle G's egentlige undergrupper, som har et index der er større end 3.

b) Opstil faktorgrupperne $G|H_i$ for alle G's egentlige undergrupper H_i, som er invariante og hvis index er større end 3. Karakterisér disse faktorgrupper ved deres isomorfi med kendte grupper. I tilfældet af isomorfi med en cyklisk gruppe $\mathcal{C}_n$ angives n og et frembringerelement.
Hvad er det totale antal af forskellige egentlige undergrupper i G?

Opgave 62 (S 03)



Figur i) viser et kvadrat. Figur ii) og den stiplede figur i iii) er begge romber. En symmetrioperation (afstandsbevarende transformation, der fører en figur over i sig selv) afbildes på den permutation af hjørnenumrene, som operationen afstedkommer. G, P, og Q er undergrupper i S_4 (den symmetriske gruppe af 4. grad), og deres elementer er samtlige afbildede symmetrielementer af henholdsvis figur i), ii), og iii).

a) Bestem cyklus-elementerne i hver af de tre grupper G, P, og Q. Vis, at G er ikke-Abelsk. Har P og Q samme egenskab? Hvilken relation er der mellem G og P, og gælder der samme relation mellem G og Q? Vis, at $P \equiv Q$.

b) Bestem mindst to af de otte forskellige elementer, $t \in S_4$, for hvilke det gælder at $P = t^{-1}Qt$. Opstil en homomorfisk afbildning f af G ind i P, således at ordenen af ker f bliver mindst mulig.

Opgave 63 (V 03/04)

Gruppen G har ordenen 8 og kan repræsenteres ved følgende 8 matricer:

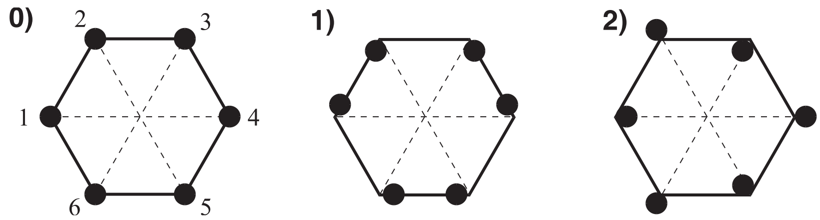
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Opstil Gs gruppetavle (Cayley-tavle). Er gruppen Abelsk? Angiv de forskellige elementers orden. Bestem gruppens fire (egentlige) undergrupper og angiv deres isomorfi med kendte grupper. Afgør om de enkelte undergrupper er invariante eller ej.

b) Gruppeelementerne i G placerer sig i 5 konjugationsklasser. Angiv antallet af ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer og bestem repræsentationernes grader. Eftervis, at de 8 matricer ovenfor er unitære og at repræsentationen er irreducibel. Angiv de forskellige elementers karakterer i denne repræsentation.

Opgave 64 (S 04)



G_0 er gruppen af afstandsbevarende symmetrioperationer for den regulære sekskant vist i figur 0), hvor disse operationer er afbildet på de tilhørende permutationer af hjørnenumrene. G_1 og G_2 betegner de tilsvarende symmetrigrupper for henholdsvis figur 1) og 2).

a) Opstil G_0's 12 elementer som "permutationscykler". Bestem ordenen og det inverse element af hvert element i G_0. Angiv hvilke 6 af G_0's elementer der henholdsvis ligger i G_1 og i G_2.

b) Opstil eksempler som viser at alle tre grupper, G_0, G_1 og G_2, er ikke-kommutative. G_0 indeholder mange undergrupper med ordenen 2, men kun en enkel af disse er invariant. Find denne undergruppe H. Opstil faktorgruppen $T = G_0|H$ (angiv hvorledes G_0's elementer parvis udgør elementerne i T). Argumentér for, at G_1, G_2 og T alle er isomorfe med samme (kendte) gruppe.

Opgave 65 (V 04/05)

De to grupper $\mathcal{C}_2(a) = \{e, a\}$ og $\mathcal{C}_3(b) = \{e, b, b^2\}$ er cykliske af henholdsvis 2. og 3. orden ($a^2 = b^3 = e$). Der kan dannes to forskellige grupper ud fra produktet $\mathcal{C}_2(a)\mathcal{C}_3(b) = \{e, a, b, \alpha = ab, \beta = b^2, \gamma = ab^2\}$, hvis den almindelige multiplikation i de to undergrupper suppleres med to forskellige regneregler:

$$A_6 = \mathcal{C}_2(a)\mathcal{C}_3(b) \text{ og } ba = ab = \alpha\,; \qquad B_6 = \mathcal{C}_2(a)\mathcal{C}_3(b) \text{ og } ba = ab^2 = \gamma$$

a) Bestem orden og de inverse elementer for de forskellige elementer i gruppen A_6. Vis at $A_6 \equiv \mathcal{C}_2(a) \otimes \mathcal{C}_3(b)$, og at $A_6 \equiv \mathcal{C}_6$, hvor $\mathcal{C}_n$ betegner den cykliske gruppe af $n$te orden.

b) Bestem orden og de inverse elementer for de forskellige elementer i gruppen B_6. Argumentér for at $B_6 \equiv S_3$ (den symmetriske gruppe af tredie grad). Bevis at det generelt gælder, at $\mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{C}_n \equiv \mathcal{C}_{2n}$, når n er et **ulige** helt tal.

Opgave 66 (S 05)

Gruppen G har ordenen 10 og er følgende undergruppe i S_5 (den symmetriske gruppe af 5'te grad): $G = \{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}$, hvor $e = (1)(2)(3)(4)(5)$ er det neutrale element, samt $a = (12345)$, $b_1 = (25)(34)$, $b_2 = (13)(45)$, $b_3 = (15)(24)$, $b_4 = (12)(35)$ og $b_5 = (14)(23)$.

a) Benyt udtrykket for a til at opstille de tilsvarende cykler for a^2, a^3 og a^4. Angiv orden og det inverse element for hvert enkelt element ($\neq e$) i gruppen. Anfør et eksempel som viser, at G er en ikke-Abelsk gruppe. Hvor mange undergrupper med index 5 indeholder G?

b) G indeholder kun én invariant undergruppe H. Opstil denne undergruppe og faktorgruppen $T = G|H$. Bestem a's konjugationsklasse $K_a = \{t^{-1}at, t \in G\}$. Opdel G i dens konjugationsklasser, når det oplyses at gruppen består af 4 konjugationsklasser (undgå detaljerede regninger). G er gruppen af afstandsbevarende symmetrioperationer for en simpel geometrisk figur, når disse operationer afbildes på de tilsvarende permutationer af hjørnenumrene. Skitsér denne figur inklusiv en nummerering af hjørnerne.

Opgave 67 (V 05/06)

Gruppen G har ordenen 8 og er følgende undergruppe i S_4 (den symmetriske gruppe af 4'de grad): $G = \{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2\}$, hvor e er det neutrale element, samt $a = (1234)$, $b_1 = (12)(34)$, $b_2 = (14)(23)$, $c_1 = (13)$ og $c_2 = (24)$.

a) Benyt udtrykket for a til at opstille de tilsvarende cykler for a^2 og a^3. Angiv orden og det inverse element for hvert enkelt element ($\neq e$) i gruppen. Anfør et eksempel som viser, at G er en ikke-Abelsk gruppe. Gruppen indeholder 5 konjugationsklasser, to af disse er $K_b = \{b_1, b_2\}$ og $K_c = \{c_1, c_2\}$. Opstil de resterende tre konjugationsklasser (giv argumenter men undgå regninger).

b) G indeholder fire undergrupper som er invariante. Opstil to af de fire invariante undergrupper.
Angiv antallet af ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer og bestem disse repræsentationers grader. Opstil G's karaktertavle (anfør argumenter for de vigtigste trin i opstillingen af tabellen).