



Øvelsesopgave 1

Find betingelsen for et ekstremum af $F(x, y)$ med bibetingelsen $f(x, y) = 0$.

a) Ved en direkte udregning.

b) Ved at benytte en Lagrange multiplikator λ , dvs. find ekstremumsbetingelsen for $G(x, y) = F(x, y) + \lambda f(x, y)$, hvor x og y er uafhængige variable, og vis at resultatet bliver det samme som i punkt a) når λ elimineres.

Øvelsesopgave 2

En homogen funktion af n te grad opfylder ligningen

$$f(\tau x_1, \tau x_2, \dots, \tau x_p) = \tau^n f(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

Bevis Eulers teorem, ligning (2.56), at for en homogen funktion af n te grad er

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_p)}{\partial x_i} = n f(x_1, x_2, \dots, x_p).$$



Øvelseopgave 3

a)

Vis at bevægelsesligningerne for de transformerede variable, i tilfældet $n = 1$,

$$q = q(Q, P), \quad p = p(Q, P), \quad H(Q, P, t) = H(q(Q, P), p(Q, P), t)$$

er

$$\frac{\partial H(Q, P, t)}{\partial Q} = -J_D \dot{P}, \quad \frac{\partial H(Q, P, t)}{\partial P} = J_D \dot{Q},$$

hvor J_D er Jacobi-determinanten $J_D = \det\left(\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)}\right)$, og dermed at betingelsen for at transformationen er kanonisk bliver $J_D = 1$.

b)

I tilfældet $n = 1$ er $\overline{\overline{M}} = \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)}$. Vis, at den nødvendige og tilstrækkelige betingelse for at $\overline{\overline{M}}$ er en symplektisk matrix, er $\det(\overline{\overline{M}}) = 1$.

Tilføjelse: Denne betingelse er ensbetydende med at $J_D = 1$ i spørgsmål a), idet $\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = \left(\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)}\right)^{-1}$ (produktet af de to matricer er enhedsmatricen).

Øvelseopgave 4

Vis at den kanoniske transformation genereret af

$$F_2 = F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = f_j(\mathbf{q}, t)P_j + g(\mathbf{q}, t)$$

svarer til en punkttransformation af L , hvor $q_i = q_i(\mathbf{Q}, t)$, kombineret med at Lagrangefunktionen erstattes af den ækvivalente Lagrangefunktion

$$L' = L - \frac{dg}{dt}$$

Hvad sker der med de generaliserede bevægelsesmængder, når $L \mapsto L'$?

(Hjælp: se side 4 i forelæsningsnoterne til kapitel 9).