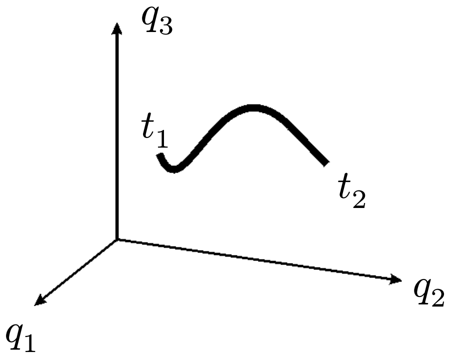
Hamiltons bevægelsesligninger

Konfigurationsrum

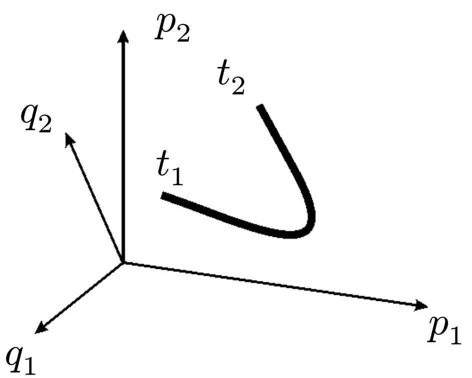


Lagrangesfunktionen: $L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = T - V$ med n **uafhængige** generaliserede koordinater. Banen i konfigurationsrummet bestemmes af n differentialligninger af **2. orden**,

Lagranges ligningerne: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

med $2n$ begyndelsesbetingelser [værdierne af $q_j(t_1)$ og $\dot{q}_j(t_1)$].

Faserum

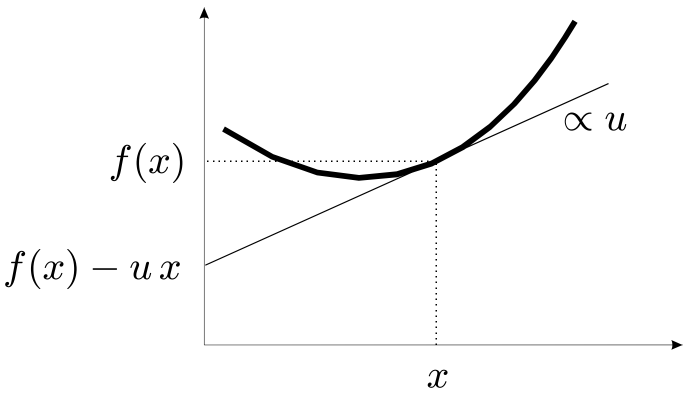


I den Hamiltonske formulering er der $2n$ uafhængige koordinater: $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, hvor p_j er de generaliserede eller konjugerede bevægelsesmængder: $p_j = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$.

De sammenhørende koordinater (q_j, p_j) betegnes kanoniske variable.

Systemets tidsudvikling bestemmes af $2n$ differentialligninger af **1. orden** med $2n$ begyndelsesbetingelser, og er nu en kurve i det $2n$-dimensionale faserum. Variabelskiftet $(q_j, \dot{q}_j, t) \mapsto (q_j, p_j, t)$, hvor $L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \mapsto H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ skal foretages ved en Legendre transformation.
H er Hamiltonfunktionen som fører til Hamiltons bevægelsesligninger ($2n$ differentialligninger af 1. orden).

Legendre transformation (i)



Legendre transformation: Funktionen $f(x) \mapsto g(u)$,
hvor $u = u(x) = \dfrac{df}{dx}$ eller $df = u\,dx$, således at kendskab
til $f(x)$ bibeholdes: $g(u) = f(x) - x\dfrac{df}{dx} = f\big(x(u)\big) - u\,x(u)$

$$\Rightarrow\ dg = df - u\,dx - x\,du = -x\,du, \quad x = x(u) = -\frac{dg}{du}$$

[Vis at en Legendre transformation af $g(u) \mapsto f(x)$.]

Termodynamik:

Den indre energi $U = U(S,V)$, hvor $dU = T\,dS - P\,dV$ eller $T = \dfrac{\partial U}{\partial S}$ og $P = -\dfrac{\partial U}{\partial V}$

Legendre transformation mht. entropien $\Rightarrow$ Helmholtz fri energi:

$$F = F(T,V) = U - S\frac{\partial U}{\partial S} = U - ST, \qquad dF = -SdT - PdV,$$

hvor T og V er uafhængige variable og F indholder de samme informationer som U.

Legendre transformation af $F(T,V)$ mht. volumen $\Rightarrow$ Gibbs fri energi:

$$G = G(T,P) = F - V\frac{\partial F}{\partial V} = F + PV, \qquad dG = -SdT + VdP,$$

hvor T og P er uafhængige variable og G indholder de samme informationer som F og U.

Legendre transformation (ii)

Analytisk mekanik:

Lagrangefunktionen $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, hvor $dL = \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$

(Bemærk at her, som i lærebogen, benyttes Einstein konventionen, at der summeres over gentagne indices: $a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Hvis der **ikke** skal summeres må man eksplicit gøre opmærksom på det, se bemærkningen til ligning (8.2) i bogen.)

Indføres den generaliserede bevægelsesmængde $p_i \equiv \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i}$ og benyttes Lagranges ligninger: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \equiv \dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ fås $dL = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$

Legendre transformation af Lagrangefunktionen: $G = G(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = L - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = L - \dot{q}_i p_i$,

Hamiltonfunktionen er defineret som:

$$H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L = \dot{q}_i p_i - L = -G \quad \Rightarrow$$

$$dH = \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - dL = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

og Hamiltons *kanoniske* ligninger: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$

$2n$ bevægelsesligninger (+ 1, hvis L afhænger eksplicit af t).

Desuden fås fra det totale differential dH, at

$$\frac{dH}{dt} = \dot{q}_i \frac{dp_i}{dt} - \dot{p}_i \frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t}\frac{dt}{dt} = \dot{q}_i \dot{p}_i - \dot{p}_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad \text{eller} \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Hamiltonfunktionen

Ligning (2.53) "Jacobis integral": $h(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t) \equiv \dot{q}_i \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = H$

Hvis $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$ er Jacobis integral og Hamitonfunktionen bevaret,
og hvis V ikke afhænger af $\dot{q}_j$, og T er en homogen funktion af 2. grad i $\dot{q}_j$ $\Rightarrow$

$$H = \dot{q}_i p_i - L = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - (T - V) = 2T - (T - V) = T + V = E$$

Generelt:
1) Vælg n generaliserede koordinater $\mathbf{q} = q_1,\ldots,q_n$ og opstil $L = L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = T - V$.
2) Find de konjugerede bevægelsesmængder $p_i = p_i(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ (8.2).
3) Opstil Hamiltonfunktionen $H = \dot{q}_i p_i - L$.
4) Inverter (8.2) og bestem $\dot{q}_i = \dot{q}_i(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$.
5) Benyt dette udtryk til at eliminere $\dot{q}_i$ fra H opstillet i punkt 3) $\Rightarrow H = H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$.

I mange tilfælde:
1) $L = L_0(\mathbf{q},t) + \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{q},t)\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\,\tilde{\dot{\mathbf{q}}}\,\overline{\overline{M}}(\mathbf{q},t)\,\dot{\mathbf{q}}$
2) $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \overline{\overline{M}}\,\dot{\mathbf{q}}$
3) $H = \tilde{\dot{\mathbf{q}}}\,\mathbf{p} - L = \tilde{\mathbf{p}}\,\dot{\mathbf{q}} - L$
4) $\dot{\mathbf{q}} = \overline{\overline{M}}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{a})$
5) $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \frac{1}{2}\,(\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{a}})\,\overline{\overline{M}}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{a}) - L_0$

Eksempler på Hamiltonfunktioner (i)

Eksempel 1: En partikel med masse m i et sfærisk potential: $V = V(r)$,
hvor $\mathbf{r} = (x, y, z) = \big(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta\big)$

Benyttes de sædvanlige kartesiske koordinater fås

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\big) - V\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\big) = L_0(\mathbf{q},t) + \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{q},t)\dot{\mathbf{q}} + \tfrac{1}{2}\,\tilde{\dot{\mathbf{q}}}\,\overline{\overline{M}}(\mathbf{q},t)\,\dot{\mathbf{q}},$$

hvor $\quad L_0 = -V, \quad \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \overline{\overline{M}} = m\overline{\overline{I}} \quad \Rightarrow \quad \overline{\overline{M}}^{-1} = m^{-1}\overline{\overline{I}}$

$p_x = m\dot{x}, \qquad p_y = m\dot{y}, \qquad p_z = m\dot{z}$

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \tfrac{1}{2}\,(\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{a}})\,\overline{\overline{M}}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{a}) - L_0 = \frac{1}{2m}\big(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\big) + V\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\big) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V$$

Hamiltons ligninger: $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \dfrac{p_x}{m}, \quad \dot{p}_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = F_x$

Vælges de sfæriske koordinater (r, θ, ϕ) som generaliserede koordinater fås:

$L = T - V = T = \tfrac{1}{2}m\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\big) - V = \tfrac{1}{2}m\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\big) - V(r)$, eller

$$L_0 = -V(r), \quad \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \overline{\overline{M}} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & mr^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{\overline{M}}^{-1} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (r\sin\theta)^{-2} \end{pmatrix}$$

$$p_r = \big(\overline{\overline{M}}\,\dot{\mathbf{q}}\big)_1 = m\dot{r}, \qquad p_\theta = \big(\overline{\overline{M}}\,\dot{\mathbf{q}}\big)_2 = mr^2\dot{\theta}, \qquad p_\phi = \big(\overline{\overline{M}}\,\dot{\mathbf{q}}\big)_3 = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}$$

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \tfrac{1}{2}\,(\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{a}})\,\overline{\overline{M}}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{a}) - L_0 = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + V(r)$$

Eksempler på Hamiltonfunktioner (ii)

Eksempel 2: Partikel med masse m og ladning q i et elektromagnetisk felt, ligning (1.63): $L = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$. Benyttes kartesiske koordinater (x_1, x_2, x_3) fås:

$$L = \tfrac{1}{2}m\,\dot{x}_i\dot{x}_i - q\phi + qA_i\dot{x}_i, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i \text{ eller } \dot{x}_i = \frac{1}{m}(p_i - qA_i) \quad \Rightarrow$$

$$H = \dot{x}_i p_i - L = \frac{1}{m}(p_i - qA_i)p_i - \frac{1}{2}m\frac{1}{m^2}(p_i - qA_i)(p_i - qA_i) + q\phi - qA_i\frac{1}{m}(p_i - qA_i)$$

$$H = \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)(p_i - qA_i) + q\phi = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} + q\phi \qquad (= \tfrac{1}{2}mv^2 + q\phi)$$

H er den totale energi $T + V$, hvor $V = q\phi$ er partiklens potentielle energi. $H \neq T + U$, hvor U er den generaliserede, hastighedsafhængige potentielle energi der bestemmer L. Det magnetiske felt $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ påvirker partiklens bane (optræder i bevægelsesligningerne), men ikke den totale energi.

Eksempel 3: *Symplektisk* notation, $2n \times 2n$ ortogonal matrix: $\quad \overline{\overline{J}} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \overline{\overline{J}}^{-1} = \tilde{\overline{\overline{J}}}$

($\mathbf{0}$ og $\mathbf{1}$ er 0- og enhedsmatricen i n dimensioner).
Indføres $\eta_i = q_i$, $\eta_{i+n} = p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ kan Hamiltons ligninger

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{omformes til} \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} = \overline{\overline{J}}\,\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}, \text{ eksempelvis for 2 koordinatvariable:}$$

$$\overline{\overline{J}}\,\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{p}_1 \\ -\dot{p}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \dot{\boldsymbol{\eta}}$$

Bevarelsessætninger og symmetrier

At q_j er en cyklisk koordinat, betyder at L er uafhængig af q_j. Er dette tilfælde fås:

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt}p_j = \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad \Rightarrow$$

i) L kan erstattes med H i definitionen af en cyklisk koordinat.
ii) p_j er en bevægelseskonstant når q_j er en cyklisk koordinat.

Systemet har en "translationssymmetri" når $q_j \mapsto q_j + \delta q_j$ ikke ændrer de fysiske forhold $\Rightarrow$ V og T og dermed $H = T + V$ uafhængig af q_j eller q_j er en cyklisk koordinat.
iii) Translationssymmetri mht. q_j medfører, at q_j er en cyklisk koordinat og p_j er bevaret.

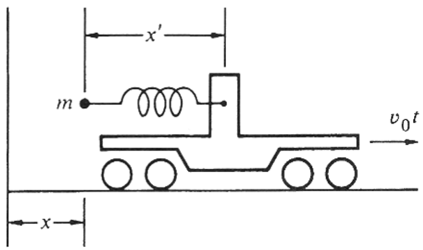
$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} = (-\dot{p}_i)\dot{q}_i + \dot{q}_i\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

iv) Afhænger H ikke eksplicit af t er H en bevægelseskonstant.

v) I de "fleste tilfælde" er H den totale energi.

Bindingerne og dermed transformationen $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{q}$ må ikke afhænge eksplicit af t. I modsat fald kan man ved passende valg af generaliserede koordinater opnå, at H er den totale energi, som ikke er bevaret eller at H er bevaret men ikke er den totale energi (se næste eksempel).

Eksempel med tidsafhængig binding



Generaliserede koordinat er den absolute koordinat x:

$L = L(x, \dot{x}, t) = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k\big(x - v_0 t\big)^2$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + k(x - v_0 t) = 0$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$H = H(x, p, t) = \dot{x}p - L = \frac{p}{m}p - \tfrac{1}{2}m\Big(\frac{p}{m}\Big)^2 + \tfrac{1}{2}k\big(x - v_0 t\big)^2 = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2}k\big(x - v_0 t\big)^2 = T + V$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -k\big(x - v_0 t\big), \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = -kv_0\big(x - v_0 t\big)$$

H er den totale energi, som her er tidsafhængig.

Generaliserede koordinat er den relative koordinat $x' = x - v_0 t$ og $\dot{x}' = \dot{x} - v_0$:

$$L = L(x', \dot{x}', t) = T - V = \tfrac{1}{2}m\big(\dot{x}' + v_0\big)^2 - \tfrac{1}{2}k(x')^2 \Rightarrow \quad p' = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = m\dot{x}' + mv_0$$

$$H = H(x', p', t) = \dot{x}'p' - L = \Big(\frac{p'}{m} - v_0)p' - \frac{(p')^2}{2m} + \tfrac{1}{2}k(x')^2$$

$$H = \frac{(p')^2}{2m} - v_0 p' + \tfrac{1}{2}k(x')^2 = \frac{(p' - mv_0)^2}{2m} + \tfrac{1}{2}k(x')^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

$$\dot{x}' = \frac{\partial H}{\partial p'} = \frac{p'}{m} - v_0, \quad \dot{p}' = -\frac{\partial H}{\partial x'} = -kx', \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

H er ikke længere den totale energi, men er bevaret i tid.

Bemærk at bevægelsesligningen er den samme i de to tilfælde: $m\ddot{x} = m\ddot{x}' = -kx'$

Variationsregning og Hamiltons ligninger

Hamiltons princip: $\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Lagranges n ligninger.

Variation af bane i konfigurationsrummet, hvor $\mathbf{q}(t_1)$ og $\mathbf{q}(t_2)$ har fastholdte værdier.

Hamiltons modificerede princip: $\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \big(p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\big) dt = 0.$

Variation af bane i faserummet, hvor både $\mathbf{q}(t_1)$ og $\mathbf{p}(t_1)$ samt $\mathbf{q}(t_2)$ og $\mathbf{p}(t_2)$ har fastholdte værdier, fører til Hamiltons $2n$ ligninger:

$$0 = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j}\Big) - \frac{\partial f}{\partial q_j} = \dot{p}_j - \frac{\partial (-H)}{\partial q_j} \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \qquad (j = 1, 2, \dots n)$$

$$0 = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_j}\Big) - \frac{\partial f}{\partial p_j} = 0 - \Big(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\Big) \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad (j = 1, 2, \dots n)$$

Det er ikke nødvendigt at fastholde værdierne af $p_j(t_1)$ og $p_j(t_2)$, fordi integrationsleddet i udledelsen af Euler-Lagrange variationsregnings-resultatet, $\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_j} \frac{\partial p_j}{\partial \alpha}\Big|_{t_1}^{t_2} = 0$ under alle omstændigheder, fordi f ikke afhænger eksplicit af $\dot{p}_j$.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \Big(L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d}{dt} g(\mathbf{q}, t)\Big) dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{uændret Lagranges ligninger.}$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Big(p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\Big) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \Big(p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \frac{d}{dt} G(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\Big) dt = 0 \quad \Rightarrow$$

uændret Hamiltons ligninger, men kun hvis værdierne af p_j er fastholdte i endepunkterne (bemærk at hvis G afhænger af p_j, så optræder $\dot{p}_j$ i den absolutte tidsafledede af G).

Eksempelvis $G = q_i p_i \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = H + q_i \dot{p}_i + \dot{q}_i p_i \qquad$ og $\qquad \delta \int_{t_1}^{t_2} \big(-\dot{p}_i q_i - H\big) dt = 0$

Mindste virkningers princip

Δ-variation af aktionsintegralet i konfigurationsrummet: $q_i(t,\alpha) = q_i(t,0) + \alpha\eta_i(t)$

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L dt \equiv \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} L(\alpha)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(0)dt\,, \qquad [\eta_i(t_1)\neq 0, \quad \eta_i(t_2)\neq 0]$$

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = L(t_2)\Delta t_2 - L(t_1)\Delta t_1 + \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Big)\delta q_i dt + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\Big|_1^2 = 0 + p_i\delta q_i\Big|_1^2$$

$\delta q_i(t_\beta) = \eta_i(t_\beta)\delta\alpha \quad (\beta = 1,2)$ og den totale ændring $\Delta q_i(t_\beta + \Delta t_\beta) = \delta q_i(t_\beta) + \dot q_i(t_\beta)\Delta t_\beta$

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = \big(L\Delta t + p_i\delta q_i\big)\Big|_1^2 = \big(L\Delta t - p_i\dot q_i\Delta t + p_i\Delta q_i\big)\Big|_1^2 = \big(p_i\Delta q_i - H\Delta t\big)\Big|_1^2$$

Antagelser: H er bevaret, både for $\alpha = 0$ og $\alpha \neq 0$, og $\Delta q_i(t_\beta + \Delta t_\beta) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = \big(p_i\Delta q_i - H\Delta t\big)\Big|_1^2 = -H(\Delta t_2 - \Delta t_1).$$ En direkte udregning giver

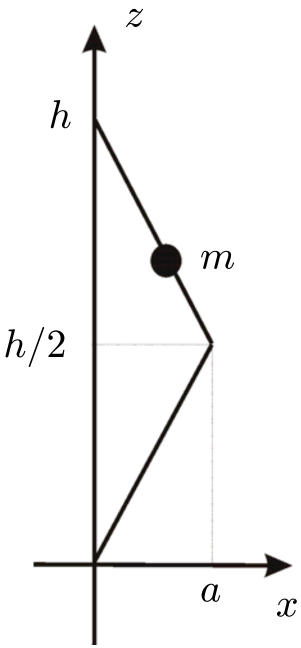
$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i\dot q_i dt - H(t_2 - t_1) \quad \Rightarrow \quad \Delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = \Delta\int_{t_1}^{t_2} p_i\dot q_i dt - H(\Delta t_2 - \Delta t_1) \quad \Rightarrow$$

Mindste virkningers princip: $\displaystyle \Delta\int_{t_1}^{t_2} p_i\dot q_i dt = 0$

Hvis definitionen af de generaliserede koordinater ikke afhænger eksplicit af t:

$$T = \tfrac{1}{2}M_{ij}\dot q_i\dot q_j \quad \text{og} \quad p_i\dot q_i = 2T \quad \Rightarrow \quad \Delta\int_{t_1}^{t_2} T dt = 0$$

Mindste virkningers princip: Illustrerende eksempel



Vi skal variere banen for et frit fald. – Antagelserne er
1) $\Delta q_i(t_\beta) = 0$, dvs. m begynder sin bane i $(x, z) = (0, h)$ til $t = t_1$, og slutter i $(x, z) = (0, 0)$ til $t = t_2$,
2) De mulige baner er dem, hvor $H = T + V$ er konstant, dvs. $H = mgh$ (begyndelseshastigheden er 0).
Den korrekte bane bestemmes ud fra "Mindste virkningers princip":

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0, \text{ hvor } \quad T = \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = H - V = mg(h - z)$$

Variationsbane: $x = \alpha(h - z)$ for $h/2 < z < h$ og $x = \alpha z$ for $0 < z < h/2$, $\alpha = \dfrac{2a}{h}$
For disse baner er $\dot{x}^2 = \alpha^2 \dot{z}^2$, $0 < z < h$ og $T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m(\alpha^2 + 1)\dot{z}^2 = mg(h - z)$

$$\Rightarrow \dot{z}^2 = \frac{2g(h - z)}{1 + \alpha^2} \text{ eller } \dot{z} = -\left[\frac{2g(h - z)}{1 + \alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \quad \text{Benyttes dette fås}$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_h^0 mg(h-z)\frac{dt}{dz} dz = \int_0^h mg(h-z)\left[\frac{1 + \alpha^2}{2g(h - z)}\right]^{\frac{1}{2}} dz = m\left[\frac{g(1 + \alpha^2)}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^h \sqrt{h - z}\, dz$$

Dvs. resultatet er $I = \int_{t_1}^{t_2} T dt = \frac{1}{3} m\sqrt{2gh^3(1 + \alpha^2)} \geq \frac{1}{3} m\sqrt{2gh^3}$

Integralet I har ekstremum (mindsteværdi) for $\alpha = 0$, dvs. den hurtigste ud af de betragtede baner, er det lodrette fald. Resultatet kan uden videre generaliseres til også at gælde, når alle andre mulige baner ($H = mgh$) inddrages.