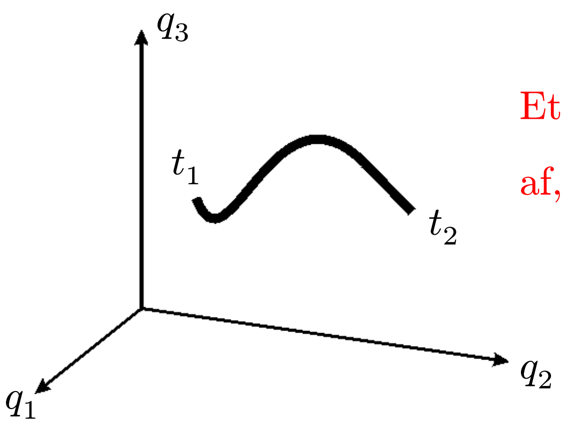
Hamiltons princip

Konfigurationsrum



Et systems bane (i konfigurationsrummet) fra t_1 til t_2 er bestemt af, at "aktionsintegralet" $I = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ har en stationær værdi.

(i) Systemet skal være "monogenisk", dvs. alle kræfter (eksklusivt bindingskræfter) skal være bestemt ved et generaliseret skalært potentiale $V = V(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$.
(ii) L er Lagrangefunktionen $L = L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) = T - V$.
(iii) At aktionsintegralet er stationært betyder, at det er ekstremalt eller at integrales "variation" er 0:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)\,dt = 0$$

(iv) Vi skal vise, at Lagranges ligninger $\Leftrightarrow$ Hamiltons princip.

Variationsregning (Euler-Lagrange) (i)

Stationær værdi af $\quad J = \int_{t_1}^{t_2} f(x, \dot{x}, t)dt\,, \qquad x = x(t)\,, \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$

Variation af $x(t)$: $x \mapsto x(t,\alpha) = x(t) + \alpha\eta(t)$, med bibetingelse $\eta(t_1) = 0$ og $\eta(t_2) = 0$.

$J(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} f\big(x(t,\alpha), \dot{x}(t,\alpha), t\big)dt$ og en stationær værdi af $J \Leftrightarrow \left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0$.

$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha}\Big)dt. \qquad$ Delvis integration af sidste led:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha}dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha dt}dt = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{\partial x}{\partial \alpha}\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\Big)\frac{\partial x}{\partial \alpha}dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\Big)\frac{\partial x}{\partial \alpha}dt$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \Big[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\Big)\frac{\partial x}{\partial \alpha}\Big]_{\alpha=0} dt = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\Big)\eta\, dt$$

Skal gælde for vilkårligt $\eta(t)$, dvs. $\delta J = \left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}\delta\alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\Big) = 0$

To variable: $J = \int_{t_1}^{t_2} f(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, t)dt$

$x_1 \mapsto x_1(t,\alpha) = x_1(t) + \alpha\eta_1(t), \qquad x_2 \mapsto x_2(t,\alpha) = x_2(t) + \alpha\eta_2(t)$

$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_1}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_2}\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \alpha}\Big)dt \quad$ og dermed

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \Big[\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_1}\Big)\eta_1 + \Big(\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_2}\Big)\eta_2\Big]dt = 0$$

som umiddelbart kan generaliseres til et vilkårligt antal (uafhængige) variable.

Variationsregning (Euler-Lagrange) (ii)

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} f(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, t) dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} = 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Eksempel (i): Korteste afstand mellem to punkter $(0,0)$ og (a,b) i planen
Kvadratet på den differentielle buelængde: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. For den parametriske kurve $(x,y) = \big(x(t), y(t)\big)$ gælder $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ eller $s = (\pm)\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$,

$$f = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \qquad \delta s = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 - \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right) = 0$$

eller $\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = c_1$ og tilsvarende $\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = c_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = \alpha\, \dot{x}, \quad \alpha = \dfrac{c_2}{c_1}$.
Antages $y = y(x)$ fås at $\dot{y} = y'(x)\dot{x}$ og dermed at $y'(x) = \alpha$. Løsningen er den rette linie

$$y(x) = \alpha x + \beta = \frac{b}{a} x \;\Rightarrow\; s = \left| \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + (y')^2}\, \dot{x} dt \right| = \left| \int_0^a \sqrt{1 + (b/a)^2} dx \right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Eksempel (ii): Hamiltons princip $\quad \delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)\, dt = 0$

$\Leftrightarrow \qquad$ Lagrange ligninger: $\quad \dfrac{\partial L}{\partial q_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$

Lagrange-multiplikatorer

At finde ekstremum af $F(x, y)$ med bibetingelsen $f(x, y) = 0$ er analogt til at bestemme ekstremum af $G(x, y) = F(x, y) + \lambda f(x, y)$, hvor x og y er uafhængige variable. λ kaldes for en "Lagrange-multiplikator" (Øvelse).

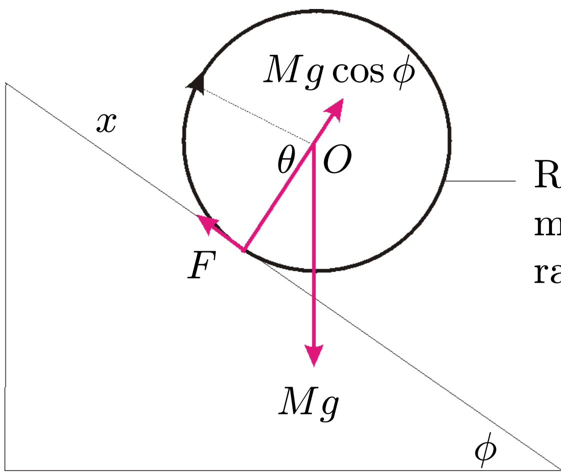
Generaliseret til mange variable kan Lagrange-multiplikatorer benyttes til at bestemme de generaliserede bindingskræfter svarende til en eller flere (m) bindinger:
$L = T - V = L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$
$f_\alpha = f_\alpha(q_1, \ldots, q_n, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$.
Indføres $\mathfrak{L} = L + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha f_\alpha$ kan Hamiltons princip benyttes: $\delta \mathfrak{I} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{L}\, dt = 0\,,$
L afhænger af $n - m$ uafhængige og m afhængige koordinater, mens alle n variable skal antages uafhængige i $\mathfrak{L}$. Metoden er kun anvendelig for (semi-)holonomiske bindinger.

De n Lagrangeligninger, udledt fra variationsprincippet $\delta \mathfrak{I} = 0$, samt de m betingelser $f_\alpha = 0$ giver en bestemmelse af de n generaliserede koordinater $q_j(t)$ samt de m Lagrange-multiplikatorer $\lambda_\alpha(t)$, hvor $\lambda_\alpha(t)$ bestemmer de n komponenter af bindingskræfterne $Q_j^f(t)$:

$$Q_j^f = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad \Rightarrow \quad Q_j^f = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial (L - \mathfrak{L})}{\partial \dot{q}_j}\Big) - \frac{\partial (L - \mathfrak{L})}{\partial q_j} = \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j}$$

Alle virkninger af andre (påtrykte + andre bindings-) kræfter er medtaget i $L = T - V$, og Q_j^f er derfor bindingskræfterne fra de m bindinger. – Bemærk, at kravet om at det virtuelle arbejde af bindingskræfterne er 0 skal stadigvæk være opfyldt, $\sum_j Q_j^f \delta q_j = 0$.

Eksempel: Rulning på skråplan



Ring:
masse M
radius r

(I) Newton:

(i) $M\ddot{x} = Mg\sin\phi - F$
(ii) $Mr^2\ddot{\theta} = Fr$ (moment om O)
(iii) Rulning $x = r\theta$
$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{1}{2}g\sin\phi, \qquad F = \frac{1}{2}Mg\sin\phi$

(II) Lagrange (generaliserede koordinater x, θ):

$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 - (-Mgx\sin\phi)$
Binding: $f(x,\theta) = x - r\theta = 0 \Rightarrow$
Bindingen eliminerer én variabel ($r\dot{\theta} = \dot{x}$):
$L = L(x, \dot{x}, t) = M\dot{x}^2 + Mgx\sin\phi \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 2M\ddot{x} - Mg\sin\phi = 0$$

(III) Lagrange-multiplikator:

$$\mathfrak{L} = L + \lambda f = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 + Mgx\sin\phi + \lambda(x - r\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} = M\ddot{x} - Mg\sin\phi - \lambda = 0, \qquad Q_x = \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \theta} = Mr^2\ddot{\theta} + \lambda r = 0, \qquad Q_\theta = \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\lambda r$$

Indsættes $f(x,\theta) = 0$, eller $r\ddot{\theta} = \ddot{x}$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{x} = \frac{1}{2}g\sin\phi, \qquad \lambda = M\ddot{x} - Mg\sin\phi = -\frac{1}{2}Mg\sin\phi = -F$$

Bevarelsessætninger og symmetrier

Hvis V ikke afhænger af $\dot{\mathbf{r}}_i$ er $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \dfrac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\Big[\sum_j \tfrac{1}{2} m_j(\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2)\Big] = m_i \dot{x}_i = p_{ix}$

Den *generaliserede bevægelsesmængde* p_j svarende til koordinaten q_j defineres som: $p_j \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

For partikler med ladninger e_i er V (generaliseret) hastighedsafhængig og $p_{ix} \neq m_i \dot{x}_i$:

$$L = \sum_j \Big[\tfrac{1}{2} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2 - e_j \phi(\mathbf{r}_j) + e_j \mathbf{A}(\mathbf{r}_j) \cdot \dot{\mathbf{r}}_j\Big] \quad \Rightarrow \quad p_{ix} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i + e_i A_x$$

At L er cyklisk mht. koordinaten q_j, eller at q_j er en cyklisk koordinat, betyder at L er uafhængig af q_j. Er dette tilfælde fås:

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} p_j = \dot{p}_j \text{ eller } p_j = \text{konstant når } \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

Den generaliserede bevægelsesmængde af en cyklisk (uafhængig) koordinat er bevaret.

For ladede partikler er $\mathbf{p}_i$ (ikke $m_i \dot{\mathbf{r}}_i$) bevaret, hvis ϕ og $\mathbf{A}$ er uafhængige af $\mathbf{r}$ (og $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$).

Cykliske koordinater kan identificeres ved symmetribetragtninger:

Systemet har en "translationssymmetri" når $q_j \mapsto q_j + \delta q_j$ ikke ændrer de fysiske forhold $\Rightarrow$ V og T og dermed L uafhængig af q_j eller q_j er en cyklisk koordinat.

Translationssymmetri mht. q_j medfører at p_j er bevaret.

Én-partikel eksempler: V er konstant langs x: L cyklisk mht. x og p_x er bevaret.

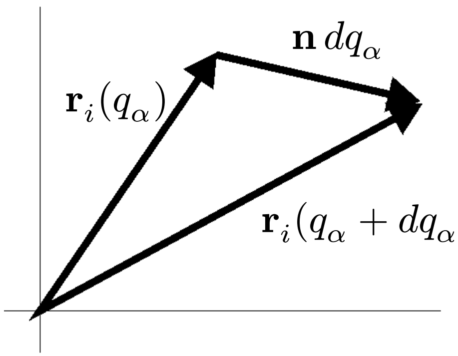
V rotationssymmetrisk om z: L er cyklisk mht. ϕ og $p_\phi = L_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z = m r_\perp^2 \dot{\phi}$ er bevaret.

N partikler: $V(\mathbf{r})$ uafhængig af x: R_x er en cyklisk koordinat og $P_x = M \dot{R}_x$ er konstant.

Eksempler på translation (i)

For et konservativt system (V er uafhængig $\dot{q}_j$)

$p_j = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ og ifl. Lagranges ligninger $\dot{p}_j = \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = \dfrac{\partial T}{\partial q_j} - \dfrac{\partial V}{\partial q_j} = \dfrac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j$



Antag, at $q_\alpha \mapsto q_\alpha + dq_\alpha$ svarer til en translation af systemet, dvs. at alle stedvektorer ændres med $\mathbf{n}\, dq_\alpha$, hvor α er et bestemt indeks og $\mathbf{n}$ er en konstant vektor:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \lim_{dq_\alpha \to 0} \frac{\mathbf{r}_i(q_\alpha + dq_\alpha) - \mathbf{r}_i(q_\alpha)}{dq_\alpha} = \frac{\mathbf{n} dq_\alpha}{dq_\alpha} = \mathbf{n}$$

$$Q_\alpha = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \qquad \text{se (1.49)}$$

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\Big(\tfrac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2\Big) = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \mathbf{n} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$$

Hvis bindingerne ikke afhænger eksplicit af t:

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{ik} M_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad M_{ik} = \sum_l m_l \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_k}, \quad \text{se (1.72)}$$

$$\frac{\partial M_{ik}}{\partial q_\alpha} = \sum_l m_l \Big(\frac{\partial^2 \mathbf{r}_l}{\partial q_i \partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_l}{\partial q_k \partial q_\alpha} \Big) = 0\,, \quad \text{idet} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_\alpha} = \mathbf{n} \text{ er konstant.}$$

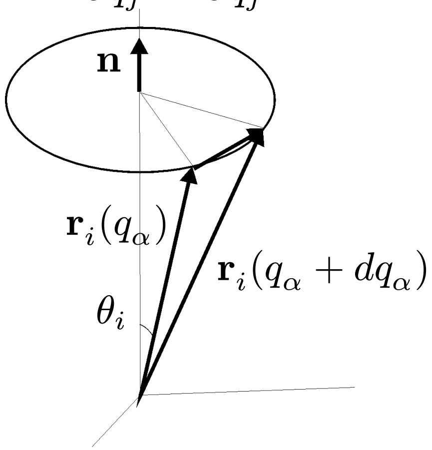
T er uafhængig af q_α og dermed $\dot{p}_\alpha = \dfrac{\partial T}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha = Q_\alpha$.

Hvis $\quad V(q_\alpha) = V(q_\alpha + dq_\alpha) \quad \Rightarrow \quad Q_\alpha = 0 \qquad$ og $\qquad p_\alpha$ er en bevægelseskonstant.

Eksempler på translation (ii)

For et konservativt system (V er uafhængig $\dot{q}_j$)

$p_j = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ og ifl. Lagranges ligninger $\dot{p}_j = \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = \dfrac{\partial T}{\partial q_j} - \dfrac{\partial V}{\partial q_j} = \dfrac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j$



$q_\alpha \mapsto q_\alpha + dq_\alpha$ svarer til en rotation af systemet:
Alle stedvektorer drejes vinklen $|\mathbf{n}|dq_\alpha$ om $\mathbf{n}$, hvor α er et bestemt indeks, og $\mathbf{n}$ er en konstant vektor.
$\mathbf{r}_i(q_\alpha + dq_\alpha) = \mathbf{r}_i(q_\alpha) + [\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i(q_\alpha)]dq_\alpha$

eller $\quad \dfrac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i$

$$Q_\alpha = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i = \mathbf{n} \cdot \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{N}$$

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\Big(\tfrac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2\Big) = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i = \mathbf{n} \cdot \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}$$

Hvis bindingerne ikke afhænger eksplicit af t:

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{ik} M_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \quad M_{ik} = \sum_l m_l \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_k},$$

$$\frac{\partial M_{ik}}{\partial q_\alpha} = \sum_l m_l \Big(\frac{\partial^2 \mathbf{r}_l}{\partial q_i \partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_l}{\partial q_k \partial q_\alpha}\Big) = \sum_l m_l \Big(\mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_i} \cdot \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_k}\Big) = 0.$$

T er uafhængig af q_α og dermed $\dot{p}_\alpha = \dfrac{\partial T}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha = Q_\alpha$.

Hvis $\quad V(q_\alpha) = V(q_\alpha + dq_\alpha) \quad \Rightarrow \quad Q_\alpha = 0 \quad$ og $\quad p_\alpha$ er en bevægelseskonstant.

Jacobis integral og energibevarelse

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \text{ og Lagranges ligninger } \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Big)\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_j \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\Big) + \frac{\partial L}{\partial t} \qquad \Rightarrow$$

"Jacobis integral" eller "energifunktionen": $h(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t) \equiv \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$

opfylder relationen $\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$, dvs. afhænger L ikke eksplicit af t er Jacobis integral bevaret. h er i mange tilfælde den totale energi af systemet. Det er tilfældet, hvis V ikke afhænger af $\dot{q}_j$, og T er kvadratisk eller en homogen funktion af 2. grad i $\dot{q}_j$ $\quad \Rightarrow$

$$h = \sum_j \dot{q}_j p_j - L = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - (T - V) = 2T - (T - V) = T + V = E$$

[Homogen funktion af $n$te grad: $f(\tau x_1, \tau x_2, \ldots, \tau x_p) = \tau^n f(x_1, x_2, \ldots, x_p) \quad \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{\partial x_i} = n\, f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ (Eulers teorem, øvelse).]

For en ladet partikel fås: $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - q\phi(\mathbf{r}) + q\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\dot{\mathbf{r}}$, $\qquad p_x = m\dot{x} + qA_x$,

$$\begin{aligned} h &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - L \\ &= \dot{x}(m\dot{x}+qA_x)+\dot{y}(m\dot{y}+qA_y)+\dot{z}(m\dot{z}+qA_z)-\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+q\phi-q(A_x\dot{x}+A_y\dot{y}+A_z\dot{z}) \\ &= \tfrac{1}{2}m\big(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\big)+q\phi = T + q\phi = E \end{aligned}$$

(det magnetiske felt udfører intet arbejde, idet $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ er vinkelret på $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$).

Benyttes Rayleighs dissipation $\mathcal{F} = \frac{1}{2}kv_i^2$ fås $Q_j = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}$ og $\frac{dh}{dt} = \frac{dE}{dt} = -2\mathcal{F}$