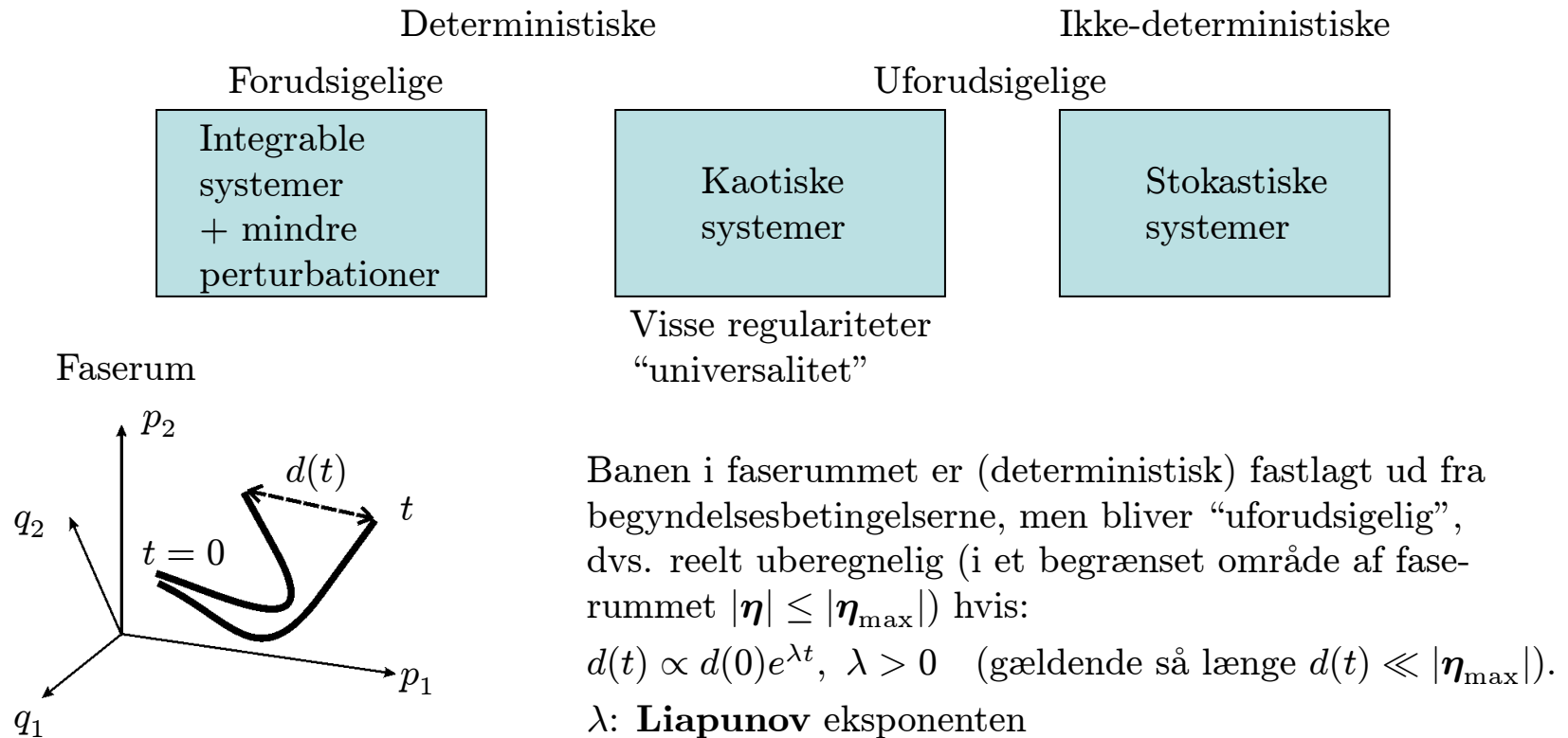


Deterministiske bevægelsesligninger kan under visse omstændigheder udvise løsninger som er “uforudsigelige”, dvs. løsninger der opfører sig *kaotisk*:



Et system er integrabelt, hvis bevægelsesligningerne kan løses eksakt (“den harmoniske oscillator”). Ikke-integrable ligninger kan løses tilnærmelsesvis vha. “perturbationsregning”, hvis de **ikke-lineære** afvigelser fra et eksakt tilfælde er “små”.

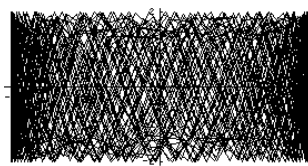
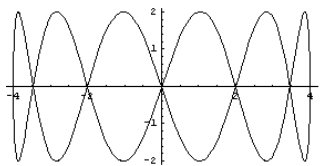
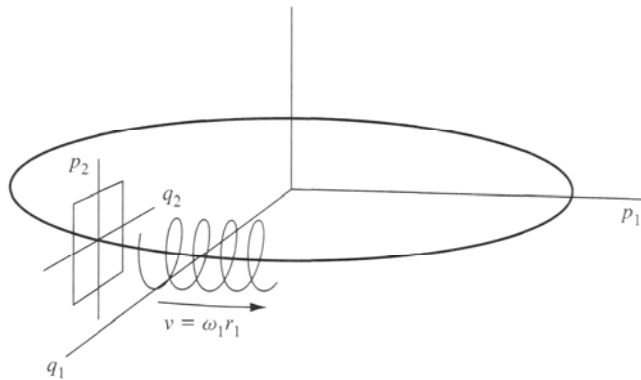
Eksempler på kaotiske systemer: Dryppende vandhane.–

Tvungen svigning af pendul med gnidning: $\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} + \sin\theta = g \sin(\omega t)$

Periodisk bevægelse

Et Hamiltonsk system (ingen dissipation, $H = T + V = E$), som er bundet til et begrænset område af det $2n$ dimensionale faserum kan (til 1. tilnærmelse) beskrives som et system af n ukoblede harmoniske oscillatorer (Taylor-rækkeudvikling til 2. orden i “små svingninger”). Evt. (lineære) koblinger kan transformeres væk ved et passende valg af koordinater (“egenvektorer”).

Ved en skala-transformation $(q_i, p_i) \mapsto (q_i(\frac{1}{2}m_i\omega_i^2)^{-1/2}, p_i(2m_i)^{1/2})$ bliver banen for den i te harmoniske oscillator en cirkel, $q_i = \sqrt{E_i} \sin(\omega_i t + \alpha_i)$, $p_i = \sqrt{E_i} \cos(\omega_i t + \alpha_i)$. Det i te bidrag til faserumsvolumnet er πE_i , eller virkningsintegralet $J_i \equiv \oint p_i dq_i = \pi E_i$.



(q_1, q_2) i tilfældene $\omega_1/\omega_2 = 6$ og 6.0633 .
 Figuren i første tilfælde er et eksempel på en *Lissajous* figur.

Eksempel med $n = 2$:

Banen er bundet til en 2-dimensional (E_1, E_2) torus-overflade i det 4-dimensionale faserum.

Figuren til venstre viser tilfældet $E_1 > E_2$, $\omega_2 > \omega_1$.

Hvis de to frekvenser er **kommensurable**, dvs. at forholdet ω_1/ω_2 er et rationalt tal r/s , gentages banen periodisk, $T = 2\pi r/\omega_1 = 2\pi s/\omega_2$, hvor r og s er hele tal uden fælles faktorer.

Er frekvensforholdet irrationalt fås en “kvasiperiodisk” bane, dvs. banen vil på senere tidspunkter komme vilkårligt tæt på startpunktet.

Perturbationer og KAM-teoremet

Hamiltonfunktionen er ikke-integrabel: $H = H_0 + \Delta H$, hvor H_0 er integrabel. Benyt Hamilton-Jacobi teorien til at transformere til koordinater (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) , hvor $H_0 \mapsto K_0 = 0$ og $\Delta H \mapsto \Delta K(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$. Antag $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}(0) + \Delta \mathbf{Q}(t)$ og tilsvarende for $\mathbf{P}(t)$ og løs bevægelsesligninger til 1. orden i de "små" tidsafhængige korrektioner (1. ordens perturbationsregning). Processen kan evt. gentages eller man kan løse bevægelsesligningerne til højere orden, hvis man ønsker at forbedre løsningen.

Poincaré analyserede tre-legeme problemet. Det er ikke integrabelt og kan udvise kaotisk opførsel. På trods af dette kan et ikke integrabelt system, som f.eks. vores planet-system, have stabile, regulære bevægelser. Betingelserne for at dette er tilfældet blev opstillet af A. Kolmogorov, V.I. Arnold og J. Moser, i det såkaldte KAM teorem:

- a) Perturbationen ΔH skal være lille.
- b) Systemets egenfrekvenser ω_i skal være inkommensurable.

Betingelserne er opfyldt for Jorden men ikke for asteroiderne i asteroidebæltet mellem Saturn og Jupiter. At betingelse b) er vigtig fremgår af at der er ingen asteroider i områder, hvor omløbstiden resonerer med Jupiters omløbstid, dvs. hvor $\omega(\text{asteroide})$ er kommensurabel med $\omega(\text{Jupiter})$, de såkaldte *Kirkwood-gab*.

Minimumsbetingelse for kaos: Ulineære første ordens differentiaalligninger med tre uafhængige variable.

Bemærk at en anden ordens differentiaalligning i en uafhængig variabel kan altid omskrives til to første ordens differentiaalligninger med to uafhængige variable (sammenlign med Lagrange og Hamiltonligningerne).

Attractors

Hvis bevægelsesligningerne indeholde dissipative led vil banerne i faserummet bevæger sig hen mod en “attractor”, som kan være et punkt, “fix-punkt”, eller en d_A -dimensional overflade, “limit cycle”, i faserummet. Et fix-punkt kan betragtes som en limit cycle med dimensionen $d_A = 0$.

1) Dæmpet pendulsvingning: $\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} + \sin\theta = 0$

Eksempel $\theta(0) = 1$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\nu = 0.1$

2) Van der Pol: $m\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$.

For små $\epsilon < 0.1$ er limit cycle en cirkel med radius 2 (ikke 1 som antydnet i lærebogen).

For store ϵ deformeres cirklen.

3) “Strange attractors” er attractors med en ikke-heltallig *fraktal* dimension.

Et eksempel er “Lorenz strange attractor”.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(r - z) - y \\ \dot{z} &= y - bz\end{aligned}$$

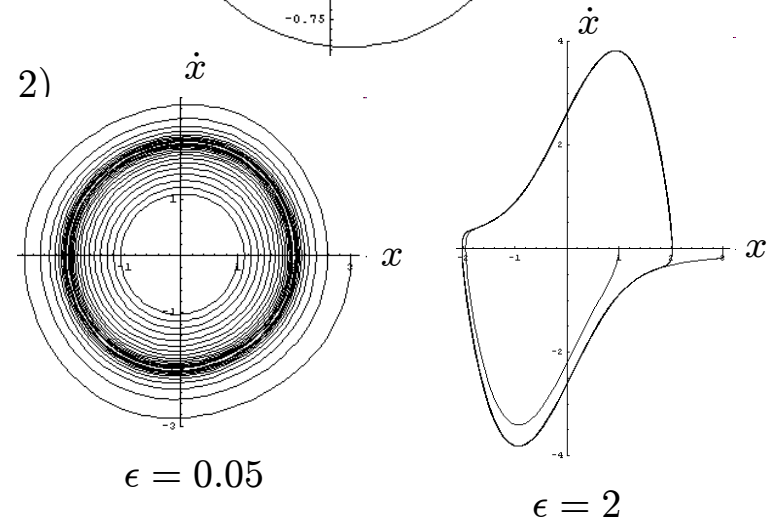
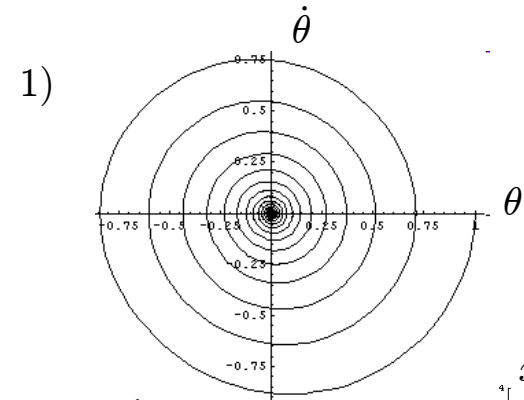
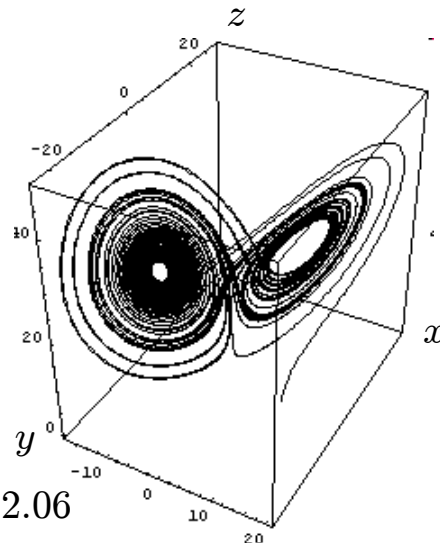
Ex.:

$$\sigma = 10$$

$$r = 28$$

$$b = 8/3$$

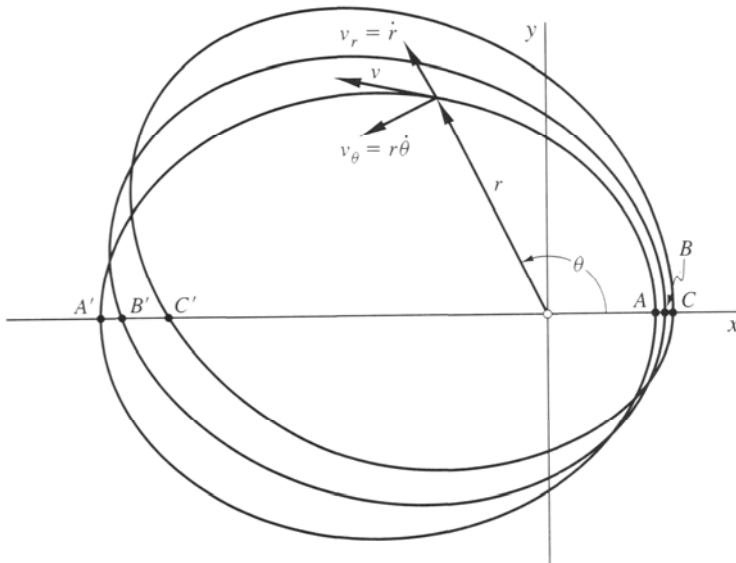
Fractal dimension: $d_A \simeq 2.06$



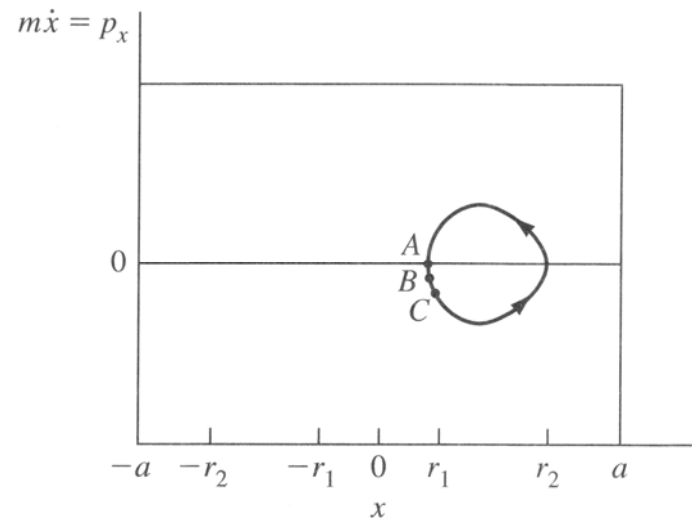
Poincaré afbildning

Poincaré afbildning: Skæringspunkterne mellem en banekurve og et plan i faserummet (f.eks. $x-p_x$ planet). For en periodisk bevægelse vil det blive en lukket kurve. Eksemplet nedenfor (bogen) viser en planetbane med en periodisk præcession (pga. påvirkning fra andre planeter).

Ellipsebaner i konfigurationsrummet.



Poincaré afbildning: Skæringspunkter mellem banekurven i faserummet og $x-p_x$ planet.



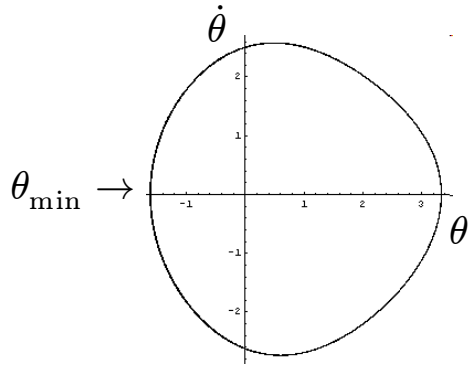
Bifurkation (periodefordobling)

Tvungen svigning af pendul med gnidning: $\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} + \sin\theta = g \sin(\omega t)$

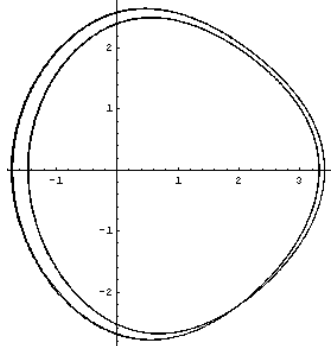
Opfylder minimumsbetingelserne for kaos:

3 uafhængige første-ordens variable θ , $\dot{\theta}$, $\phi = \omega t$ og ligningen er ulineær pga. $\sin\theta$.

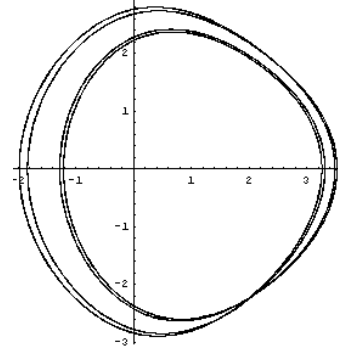
Eksempel: $\nu = 0.5$, $\omega = 1$ (resonans), $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 1.5$



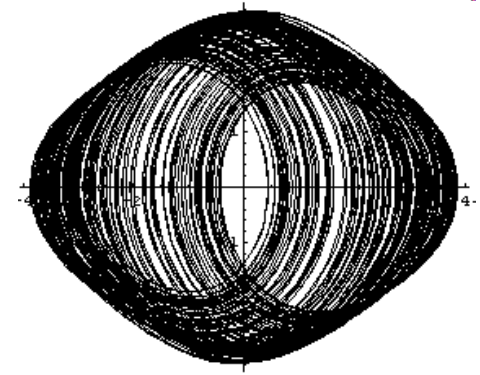
$g = 2.31$
periodisk



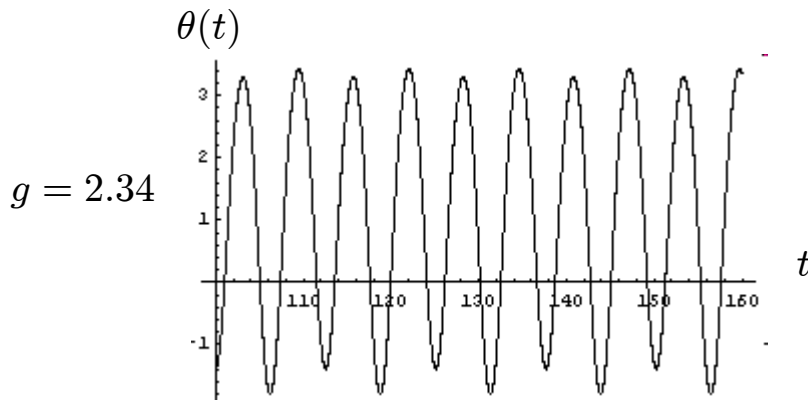
$g = 2.34$
fordoblet periode



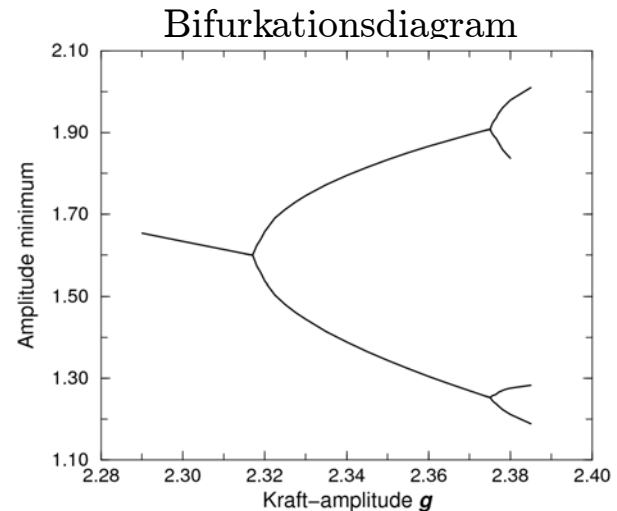
$g = 2.38$
firedoblet periode



$g = 2.5$
kaotisk



$g = 2.34$



Bifurkation (ii) – Den logistiske ligning

11.7

$$x_{n+1} = a(1 - x_n)x_n, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Fix-punkt: $x_{n+1} = x_n = x_\infty \Rightarrow x_\infty = a(1 - x_\infty)x_\infty \Rightarrow x_\infty = \frac{a-1}{a}, \quad a \geq 1$

Stabilitet:

$$x_n = \frac{a-1}{a} + \delta \Rightarrow x_{n+1} = \frac{a-1}{a} + (2-a)\delta + \mathcal{O}(\delta^2) \Rightarrow |2-a| < 1 \quad \text{eller} \quad 1 < a < 3$$

$a > 3$:

$$a = 3.2: \quad (\text{for } n \gg 1): \quad x_n = 0.513045, \quad x_{n+1} = 0.799445 \quad (x_\infty = 0.6875)$$

$$a = 3.5: \quad x_n = 0.5009, \quad x_{n+1} = 0.8750 \quad x_{n+2} = 0.3828, \quad x_{n+3} = 0.8269$$

Feigenbaum punkt (kritiske værdi for kaotisk løsning): $a_\infty = 3.5699456\dots$

Liapunov eksponenten:

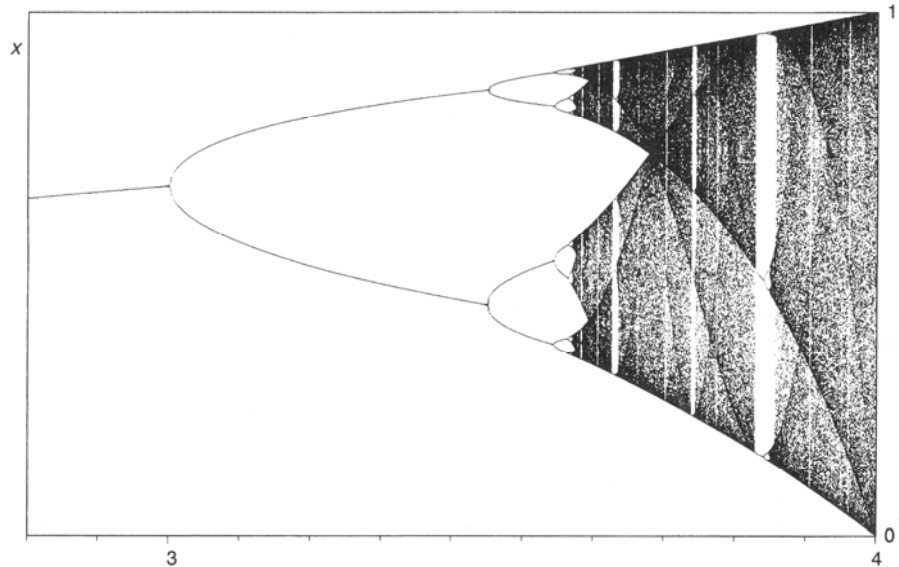
$$\lambda \leq 0 \text{ for } a < a_\infty$$

$\lambda = 0$ i bifurkationspunkterne.

$$\lambda > 0 \text{ for } a > a_\infty$$

Bifurkationsdiagram:

Feigenbaum træ



Bifurkation (iii) Feigenbaum træ

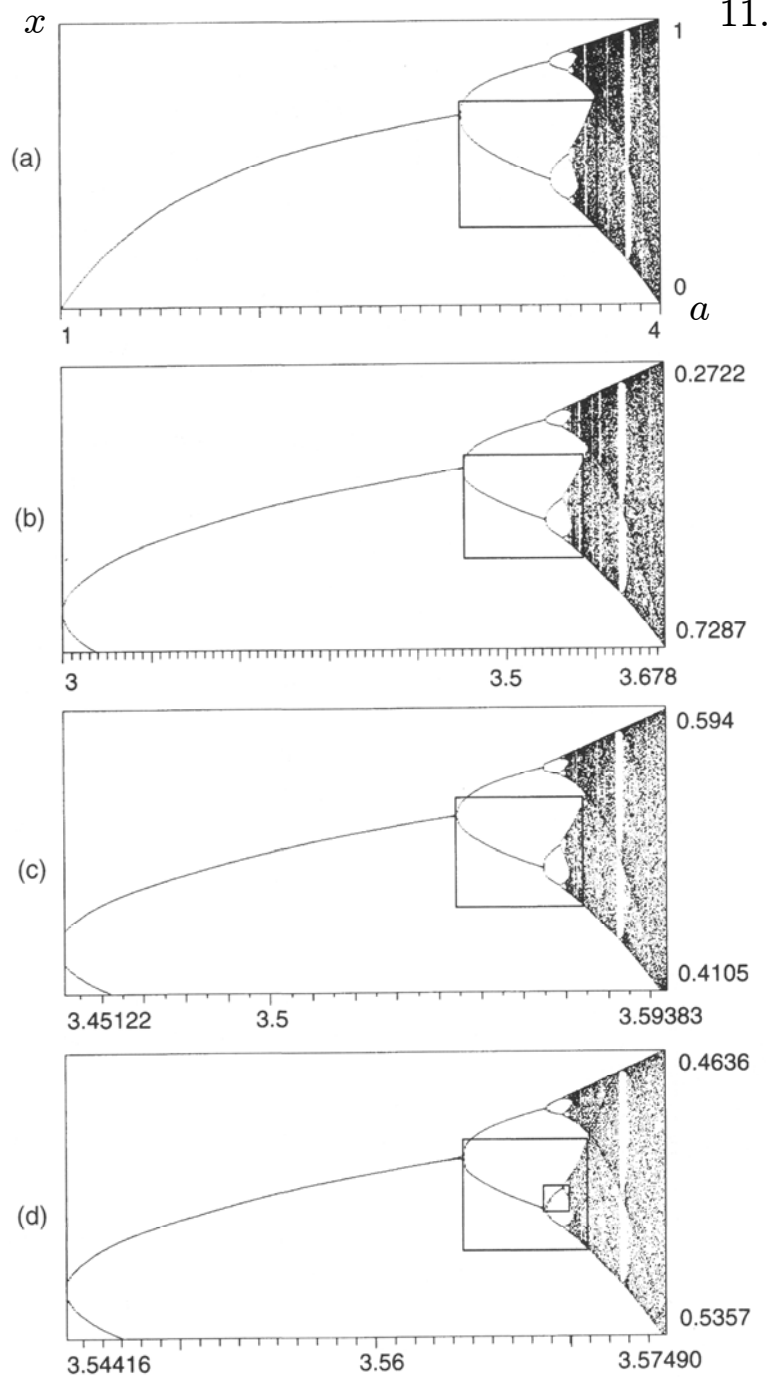
Universalitet: "Vejen til kaos"

Bifurkationspunkter: (a_b, x_b)

$$\delta = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{a_b - a_{b-1}}{a_{b+1} - a_b} = 4.6692016 \dots$$

$$\alpha = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x_b - x_{b-1}}{x_{b+1} - x_b} = 2.50290787 \dots$$

Feigenbaumtræet udviser en fraktal struktur, dvs. selv-ligedannedhed eller *Selvsimilaritet*.



Målestok med længden a :

(i) Et liniestykke ($d = 1$) med længden L opdeles i $N(a) = \frac{L}{a}$ bokse.

(ii) Et kvadrat ($d = 2$) med sidelængderne L opdeles i $N(a) = \left(\frac{L}{a}\right)^2$ bokse.

osv, eller generelt $N(a) = \left(\frac{L}{a}\right)^d \Rightarrow d = \left(\lim_{a \rightarrow 0}\right) \frac{\log N(a)}{\log(L/a)}$

Fraktal eller Hausdorff dimension d_F

(a) Cantor-sæt: Den midterste trediedel af hvert liniestykke fjernes:

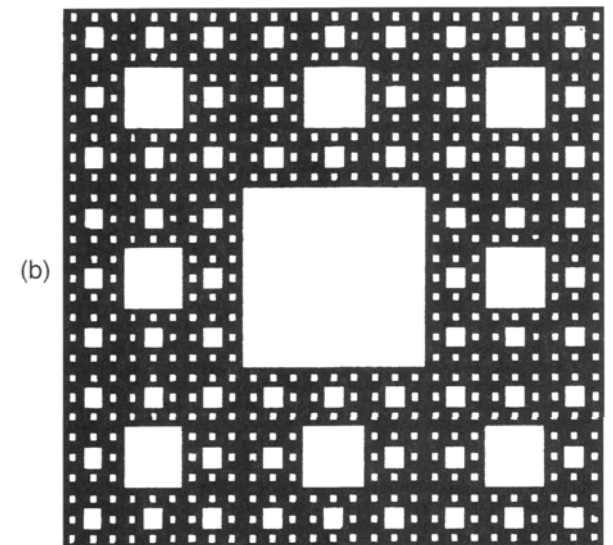
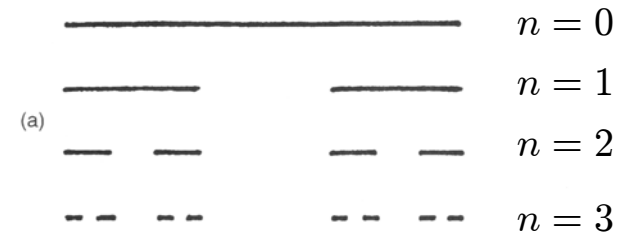
$$a = \frac{L}{3^n}, \quad N(a) = 2^n$$

$$d_F = \frac{\log 2^n}{\log 3^n} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309$$

(b) Sierpinski tæppe: Siderne i hvert kvadrat tredeles og det midterste fjernes:

$$a = \frac{L}{3^n}, \quad N(a) = 8^n$$

$$d_F = \frac{\log 8^n}{\log 3^n} = \frac{\log 8}{\log 3} = 1.8928$$



Fraktaler og dimensionalitet (ii)

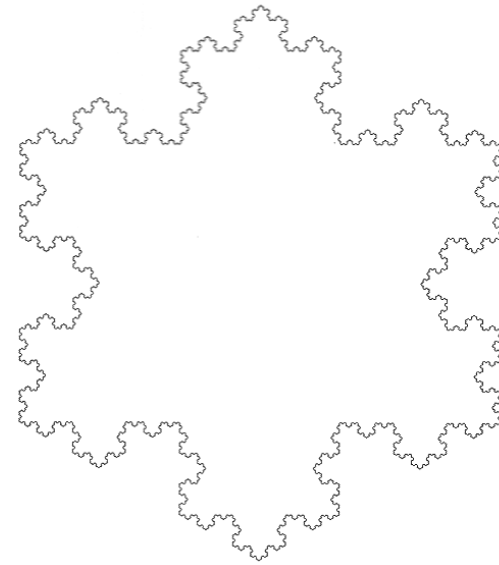
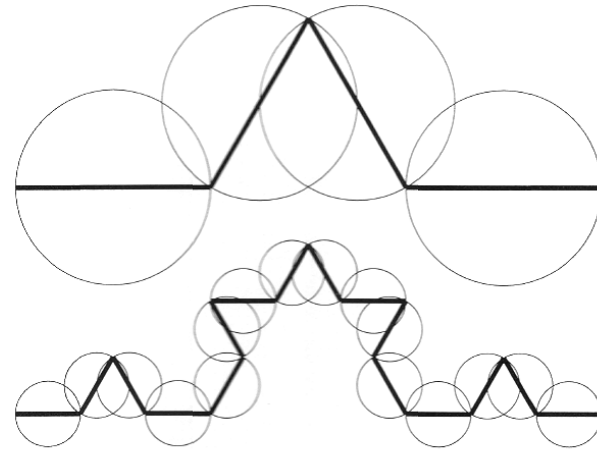
Von Koch's snefnug:

Dimensionalitet:

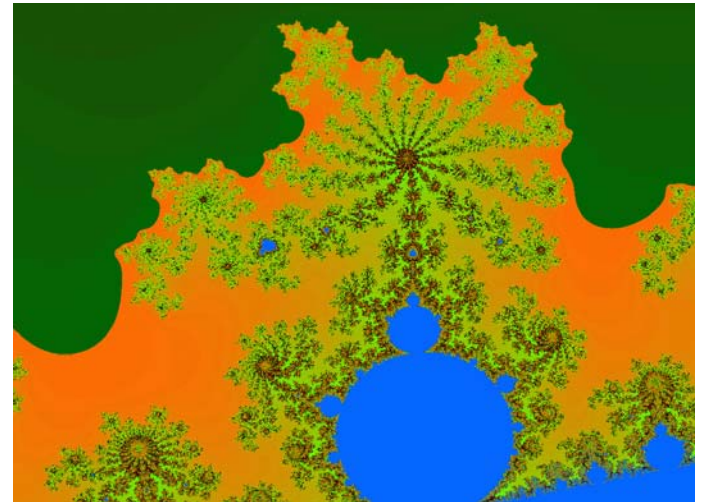
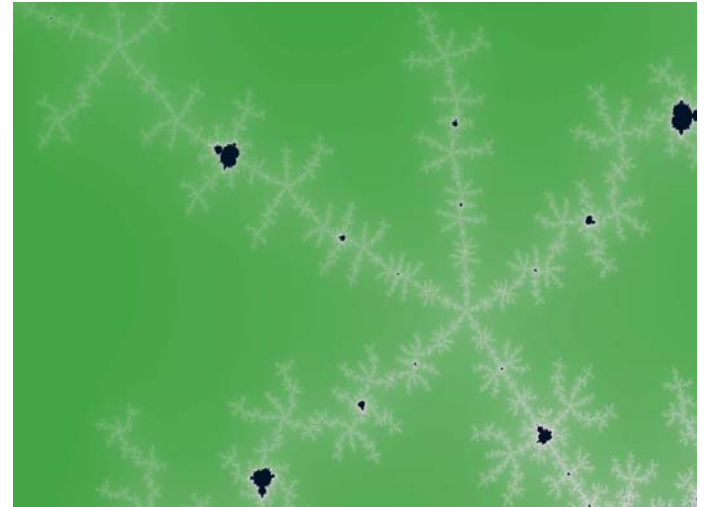
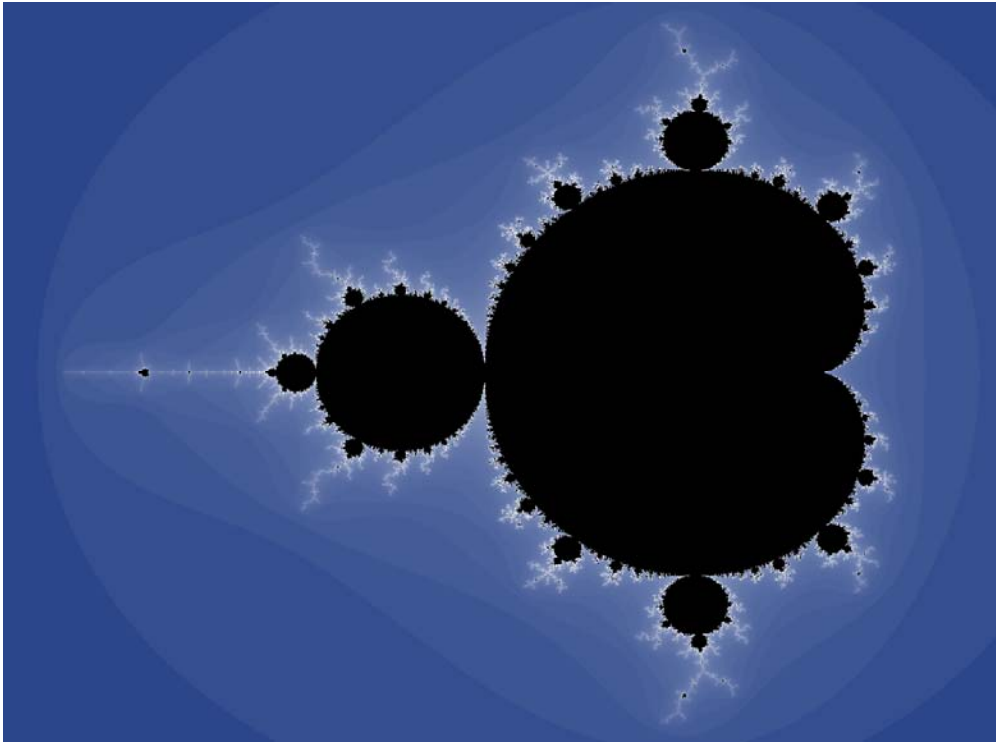
$$a = \frac{L}{3^n}, \quad N(a) = 4^n$$

$$d_F = \frac{\log N(a)}{\log(L/a)} \text{ eller}$$

$$d_F = \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2619$$



Eksempelvis: Norges kystlinie: $d_F \simeq 1.4$, Englands kystlinie: $d_F \simeq 1.2$



$$z(0) = z, \quad z(n+1) = z^2(n) + z(0), \quad n = 0, 1, \dots$$

z tilhører Mandelbrot sættet, hvis $|z(n)| < B$ for alle n .

Farverne, uden for Mandelbrot-sættet, er afstemt af for hvilket værdi af n , $|z(n)| > B = \sqrt{5}$

Mandelbrot sæt II

11.12

