Classical Mechanics (3. edition) by Goldstein, Poole & Safko

Mekanisk bevægelse af en partikel: Newtons anden lov

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{p}}$$

Bevarelsesteorem for en partikels bevægelsesmængde: *Hvis den totale kraft* $\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$, *så er* $\dot{\boldsymbol{p}} = \mathbf{0}$ *og bevægelsesmængden (linear momentum)* $\boldsymbol{p}$ *er bevaret.*

Bevægelsesmængdemomentet (impulsmomentet) af en partikel og kraftmomentet (torque) mht. O defineres henholdsvis, som

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

og en omskrivning af Newtons anden lov giver:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\mathbf{p} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{L}}$$

Bevarelsessætning for en partikels bevægelsesmængdemoment: *Hvis det totale kraftmoment* $\boldsymbol{N} = \mathbf{0}$, *så er* $\dot{\boldsymbol{L}} = \mathbf{0}$ *og bevægelsesmængdemomentet (angular momentum)* $\boldsymbol{L}$ *er bevaret.*

Newtons 2. lov på integreret form

Den ydre krafts arbejde (når m er konstant):

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(v^2\right) dt = \tfrac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2\right) = T_2 - T_1$$

hvor $T = \frac{1}{2} m v^2$ er den kinetiske energi.

Hvis kraftfeltet er konservativt fås: $(d\mathbf{s} = d\mathbf{r})$

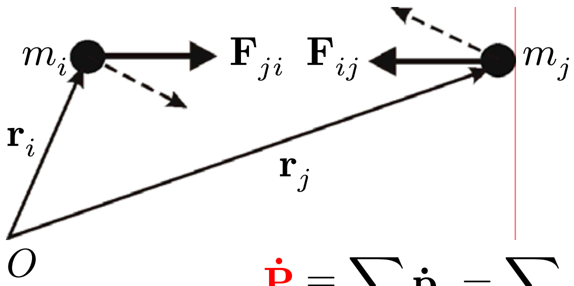
$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\nabla V \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{s}} \cdot d\mathbf{s} = -dV$$

hvor $V(\mathbf{r})$ er den potentielle energi, og dermed

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 dV = V_1 - V_2 = T_2 - T_1 \quad \text{eller} \quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

Den totale energi, som er summen af den kinetiske og den potentielle energi $T + V$, er bevaret for en partikel i et konservativt kraftfelt.

System af mange partikler (i)
Loven om aktion og reaktion



(i) $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{0}$ (svag)

(ii) $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$ (stærk) $\qquad [\mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j]$

$$\dot{\mathbf{P}} \equiv \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \left(\mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{ji}\right) = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \equiv \mathbf{F}^{(e)}$$

Totale masse $M = \sum_i m_i$ og massemidtpunkt $\mathbf{R} = \dfrac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \Rightarrow \mathbf{P} = \sum_i m_i \dfrac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}$

$$\dot{\mathbf{L}} \equiv \frac{d}{dt}\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}\right) = \sum_i \mathbf{N}_i^{(e)} \equiv \mathbf{N}^{(e)}$$

Indføres relative koordinater $\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i\,; \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \mathbf{v}'_i \qquad [\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}]$ fås

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i m_i \mathbf{R} + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \Rightarrow \sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0} \quad \text{og} \quad \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$$

og dermed

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \sum_i m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i) \\ &= \mathbf{R} \times \mathbf{v} \sum_i m_i + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v} + \mathbf{R} \times \sum_i m_i \mathbf{v}'_i + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i\end{aligned}$$

System af mange partikler (ii)

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2} m_i v_i^2\right) dt = T_2 - T_1$$

hvor den totale kinetiske energi er

$$T = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i') \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i') = \tfrac{1}{2} M v^2 + \sum_i \tfrac{1}{2} m_i (v_i')^2$$

Hvis de ydre $\mathbf{F}_i^{(e)}$ og indre kræfter $\sum_j \mathbf{F}_{ji}$ alle er konservative fås

$\mathbf{F}_i^{(e)} = -\nabla_i V_i \quad$ og $\quad \mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ji}$

Loven om aktion og reaktion (den stærke version) $\Rightarrow V_{ji} = V_{ij} = V_{ji}(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) = V_{ji}(r_{ji})$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ji}(r_{ji}) = -V_{ji}'(r_{ji})\,\hat{\mathbf{r}}_{ij}; \qquad \hat{\mathbf{r}}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)/r_{ij} \\ \mathbf{F}_{ij} = -\nabla_j V_{ij}(r_{ij}) = -V_{ij}'(r_{ij})\,\hat{\mathbf{r}}_{ji} = -V_{ji}'(r_{ji})\,(-\hat{\mathbf{r}}_{ij}) = -\mathbf{F}_{ji} \end{cases}$$

$$\int \left(\mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i + \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_j\right) = \int \mathbf{F}_{ji} \cdot d(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) = -\int V_{ji}'(r_{ji}) \hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\int V_{ij}'(r_{ij}) dr_{ij} = -V_{ij}$$

Defineres den totale potentielle energi $\quad V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \quad$ er $\quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

For et fast legeme (rigid body) er r_{ij} konstant og $V_{ij}(1) = V_{ij}(2)$
V kan erstattes med $\sum_i V_i$ (de indre kræfter udfører intet arbejde).

Bindinger (Constraints)

System af N partikler med holonomiske bindinger:

(i) $\quad f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \qquad$ (t indgår: "rheonomous")

(ii) $\quad f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N) = 0 \qquad$ (t indgår ikke: "scleronomous")

Eks.:
(a) Fast legeme: $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$.
(b) Partikler bundet til at bevæge sig på en overflade eller langs en kurve (scleronomous, hvis den ikke bevæger sig – i modsat fald: rheonomous).

Antallet af bevægelsesligninger er $3N$, og antallet af uafhængige ligninger er $3N - k$, hvis der er k holonomiske bindinger:
Systemet har $3N - k$ frihedsgrader, som kan beskrives vha. $3N - k$ generaliserede koordinater

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \ldots, q_{3N-k}, t) \qquad q_1 = q_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, t)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \ldots, q_{3N-k}, t) \qquad q_{3N-k} = q_{3N-k}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, t)$$

Bindingerne påvirker partikelsystemet med kræfter som ikke kendes på forhånd.

Ikke-holonomiske bindinger: Udtryk som benytter ulighedstegn, eller differentielle udtryk der ikke kan integreres til en holonomisk ligning (se eksempel i lærebogen).

D'Alemberts princip og Lagrangefunktionen (i)

Den totale kraft på den $i$te partikel er $\mathbf{F}_i^{(t)} = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$
Antagelse: Det samlede virtuelle arbejde udført af bindingskræfterne er 0: $\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$
$\delta \mathbf{r}_i$ er en virtuel differentiel forskydning af den $i$te partikel, der overholder bindingerne for et fastholdt tidspunkt ($\delta t = 0$). Eksempel: normalkraften fra en overfladebinding udfører intet arbejde når partiklerne forskydes langs overfladen. Bemærk at evt. gnidningskræfter tangentielt til fladen er bibeholdt i $\mathbf{F}_i^{(a)}$. I det dynamiske tilfælde fås:
$\mathbf{F}_i^{(t)} = \dot{\mathbf{p}}_i$ eller $\mathbf{F}_i^{(t)} - \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_i \left(\mathbf{F}_i^{(t)} - \dot{\mathbf{p}}_i\right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \left(\mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i - \dot{\mathbf{p}}_i\right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \Rightarrow$

D'Alemberts princip: $$\sum_{i=1}^{N} \left(\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_\mathbf{i}\right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \qquad (\mathbf{F}_i \equiv \mathbf{F}_i^{(a)})$$

Med k holonomiske bindinger kan $\mathbf{r}_i$ udtrykkes ved $n = 3N - k$ generaliserede koordinater:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \qquad \text{og} \qquad \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \qquad \mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}.$$

Generaliserede kræfter: $$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{ij} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \equiv \sum_j Q_j \delta q_j \Rightarrow Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_j m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)\right] \delta q_j$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \Rightarrow$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j}\right] \delta q_j = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\tfrac{1}{2} m_i v_i^2\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\tfrac{1}{2} m_i v_i^2\right)\right] \delta q_j$$

D'Alemberts princip og Lagrangefunktionen (ii)

D'Alemberts princip $\sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \left\{ Q_j - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \right\} \delta q_j = 0$

De generaliserede koordinater q_j er uafhængige variable $\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$

Antages $\mathbf{F}_i = -\nabla_i V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, t)$ fås $Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

som indsat giver: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$ eller $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$

(V er uafhængig af $\dot{\mathbf{r}}_i$ og dermed af $\dot{q}_j$).

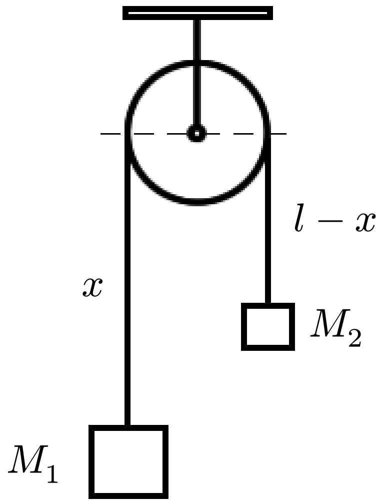
Lagrangefunktionen: $L \equiv T - V$ $\Rightarrow$ Lagranges ligninger: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

Lagrangefunktionen er ikke éntydig:

$L = T - V + \frac{d}{dt} f(q_1, \ldots, q_n, t)$ opfylder også Lagranges ligninger, idet $\frac{df}{dt} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial t}$

Konservative + ikke-konservative kræfter: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$(ikke-konservative)

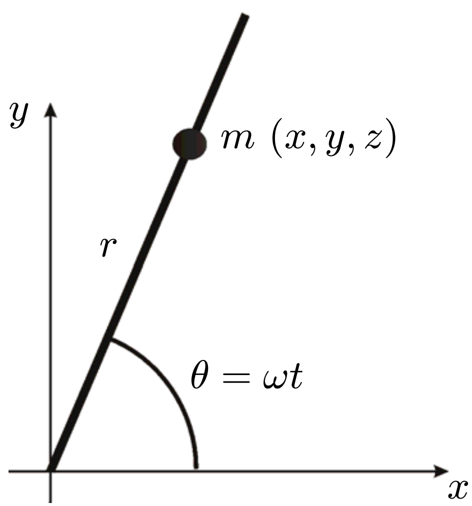
Eksempler (i)



Atwood's faldmaskine:
Generaliseret koordinat: x
Potentiel energi: $V = -gM_1 x - gM_2(l-x)$
Kinetisk energi: $T = \frac{1}{2}\big(M_1 + M_2\big)\dot{x}^2$
Lagrangefunktionen: $L = T - V$ og $\dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\Big[\big(M_1 + M_2\big)\dot{x}\Big] - \big(gM_1 - gM_2\big) = 0 \quad \text{eller}$$

$$\ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\, g$$



Gnidningsfri ring på jævnt roterende stang:
Generaliseret koordinat: r
Holonomiske ligninger: $x = r\cos\omega t,\ y = r\sin\omega t,\ z = c$
Potentiel energi: $V = 0$
Kinetisk energi: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)$
Lagrangefunktionen: $L = T - V$ og $\dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}\Big) - \dfrac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\Big(m\dot{r}\Big) - m\omega^2 r = 0 \qquad \text{eller}$$

$$\ddot{r} = \omega^2 r\,; \qquad r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Eksempler (ii)

(i) Generelt:

$$T = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \Big(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \Big)^2 = M_0 + \sum_j M_j \dot{q}_j + \tfrac{1}{2} \sum_{jk} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$M_0 = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \Big(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \Big)^2 , \qquad M_j = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} , \qquad M_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$$

Scleronomous holonomiske bindinger: $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \ldots, q_n) \Rightarrow \dfrac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0$ og $M_0 = M_j = 0$.

(ii) Enkel partikel: $q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = z \ \Rightarrow\ T = \sum_{j=1}^{3} \tfrac{1}{2} m\, \dot{q}_j^2\, ,\ V = V(\mathbf{q})\, ,\ L = T - V$

For $j = 1,\ 2,$ eller 3: $\dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Big) - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = \dfrac{d}{dt}(m\dot{q}_j) + \dfrac{\partial V}{\partial q_j} = \dot{p}_j - F_j = 0$ (Newtons 2. lov)

(iii) Enkel partikel: $q_1 = \rho,\ q_2 = \theta$ og (cylinderkoordinater) $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = z_0$
$T = \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \tfrac{1}{2} m[(\dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta)^2] = \tfrac{1}{2} m[\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2]$
$V = V(\rho) = \tfrac{1}{2} k\rho^2$ (fjederkonstant: k), dvs. $\qquad L = T - V = \tfrac{1}{2} m[\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2] - \tfrac{1}{2} k\rho^2$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\theta}^2 - k\rho\, , \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0\, , \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}\, , \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} \ \Rightarrow$$

Lagranges ligninger (bevægelsesligninger): (1) $\dfrac{d}{dt}(m\dot{\rho}) - m\rho\dot{\theta}^2 + k\rho = 0$, (2) $\dfrac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\theta}) = 0$

Ligning (2) viser at $\hat{\mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{N} = 0$. Andet led i (1) er m gange centripetalaccelerationen ("centrifugalkraften" hvis leddet flyttes over på den anden side af lighedstegnet) og $-k\rho$ er den radiære fjederkraft.

Specialløsning: $\rho = \rho_0$, $\dot{\theta} = \omega$, hvor $\omega^2 = k/m$

Lagrangefunktion og ikke-konservative kræfter

Lagrangefunktion for partikel med ladning q i et elektromagnetisk felt

$$L = T - U = \tfrac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$$

hvor $\quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\,, \quad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \qquad$ (bemærk at $U = V$, hvis $\mathbf{A} = \mathbf{0}$).

Benyttes $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$ i Lagranges ligninger fås:

$$0 = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q_1}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\big(mv_x + qA_x\big) - (-q)\frac{\partial\phi}{\partial x} - q\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) =$$
$$m\ddot x + q\Big(\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\Big) + q\frac{\partial\phi}{\partial x} - q\Big(\frac{\partial A_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial A_y}{\partial x}v_y + \frac{\partial A_z}{\partial x}v_z\Big) =$$
$$m\ddot x + qv_y\Big(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\Big) + qv_z\Big(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\Big) + q\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\Big) =$$
$$m\ddot x + qv_y(-B_z) + qv_zB_y - qE_x = m\ddot x - q(\mathbf{v}\times\mathbf{B} + \mathbf{E})\cdot\hat{\mathbf{x}} = m\ddot x - \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{x}} = 0$$

i overensstemmelse med at Lorenz-kraften på den ladede partikel er $\quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$.

Gnidningskræfter:
$\mathbf{F}_i = -k\mathbf{v}_i$ kan inkluderes vha. *Rayleighs dissipationsfunktion* $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\sum_i kv_i^2 \;\Rightarrow$

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathbf{v}_i}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}_i}{\partial\dot q_j} = -\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot q_j} \;\Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot q_j} = 0$$