Goldstein 1.13: Raketligningen

Kim Georg Lind Pedersen

September 8, 2010

Denne note præsenterer en fuldstændig løsning af opgave 1.13 i Goldstein, som omhandler den berømte raketligning.

Fysikken for raketter er også gennemgået i lærebogen University Physics. I 12. udgave kan man bladre frem til afsnit 8.6 og læse om *Rocket Propulsion*.

1 Udled raketligningen

Vi betragter en raket som opsendes lodret fra jordens overflade. Raketten forbrænder brændstof, der udsendes med konstant hastighed v' set i forhold til raketten. Vi vil gerne finde bevægelsesligningerne for raketten, og begynder derfor med Newtons anden lov,

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}. \tag{1}$$

Vi definerer et koordinatsystem, som bevæger sig med raketten, og hvis positive retning peger i rakettens flyveretning.

Kraften på systemet (raktten) til tiden t er så givet ved tyngdekraften

$$F(t) = -mg. \tag{2}$$

Impulsændringen er lidt mere tricky. Til tiden t har raketten massen m og flyver med hastigheden v. Den har altså impulsen

$$p(t) = mv. \tag{3}$$

Et infinitesimalt tidsinterval dt senere har raketten accelleret til hastigheden $v + dv$ ved at udstøde noget brændstof mod jorden med hastigheden v' (målt i forhold til raketten). Impulsen af raket og brændstof er nu,

$$p(t + dt) = (m + dm)(v + dv) + m_g(v - v'), \tag{4}$$

hvor m_g massen af brændstoffet. Totalt set er massen bevaret så $m + dm + m_g = m$, og vi kan endeligt skrive

$$p(t + dt) = (m + dm)(v + dv) - dm(v - v'). \tag{5}$$

Vi kan nu udregne impulsændringen, hvis vi ser bort fra led som $dmdv$, så

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= \frac{p(t + dt) - p(t)}{\mathrm{d}t} && (6) \\ &= \frac{(m + dm)(v + dv) - dm(v - v') - mv}{\mathrm{d}t} && (7) \\ &= v'\frac{dm}{dt} + m\frac{dv}{dt}. && (8) \end{aligned}$$

Indsæt til sidst vores to resultater Lgn. (2) og Lgn. (8) i Newtons anden lov, for at finde raketligningen

$$m\frac{dv}{dt} = -v'\frac{dm}{dt} - mg \tag{9}$$

2 Integrér raketligningen

Vi vil antage at udstødningsraten for brændstoffet er konstant. Dvs.

$$c = \frac{dm}{dt}. \tag{10}$$

Flytter vi lidt rundt på leddene i raketligningen, kan vi se at

$$dv = -\frac{v'}{m}dm - gdt = -\frac{v'}{m}dm - \frac{g}{c}dm, \tag{11}$$

hvor vi i den sidste ligning har brugt at $dt = dm/c$. Lige før raketten affyres, har den massen m_i og hastigheden 0. Når den har opbrugt al sit brændstof, har den massen m_f og hastigheden v_f. Hvis vi integrerer Lgn. (11) får vi

$$\int_0^{v_f} dv = -\int_{m_i}^{m_f} \frac{v'}{m}dm - \int_{m_i}^{m_f} \frac{g}{c}dm \tag{12}$$

$$v_f = -\Big[v' \ln(m)\Big]_{m=m_i}^{m=m_f} - \left[\frac{g}{c}\right]_{m=m_i}^{m=m_f} = v' \ln(m_i/m_f) + \frac{g}{c}(m_i - m_f). \tag{13}$$

3 Massen af brændstof

Opaven er nu at finde forholdet mellem massen af brændstoffet og massen af raketten uden brændstof, $(m_i - m_f)/m_f$, hvor vi må antage at $m_i \gg m_f$.

Vi får besked på at undersøge tilfældet hvor,

$$c = -m_i/60 \tag{14}$$

$$v' = 2,1\,\mathrm{km/s} \tag{15}$$

$$v_f = v_e = 11,2\,\mathrm{km/s} \tag{16}$$

Indsætter vi udtrykket for udstødningsraten c i Lgn. (13) får vi at

$$v_f = v' \ln(m_i/m_f) - 60g\frac{m_i - m_f}{m_i} \approx v' \ln(m_i/m_f) - 60g. \tag{17}$$

Vi kan nu isolere,

$$\frac{m_i - m_f}{m_f} = \frac{m_i}{m_f} - 1 = \exp\left[\frac{v_f + 60g}{v'}\right] - 1 = \exp\left[\frac{11,2\,\mathrm{km/s} + 60 \cdot 9,8\,\mathrm{m/s^2}}{2,1\,\mathrm{km/s}}\right] - 1 \tag{18}$$

$$= 273. \tag{19}$$

Bemærk dog at forholdet mellem massen af raket og brændstof ikke behøver være så voldsomt, hvis man "bare" vil undslippe jordens tyngdefelt. En raket opsendt fra jordens overflade vil nå at flytte sig et godt stykke, mens den accellererer. Undslippelseshastigheden siger kun noget, om hvilken hastighed du bør have, hvis du fra jordradius skal overvinde tyngdekraften... den tager ikke højde for ekstra acceleration.