NIELS BOHR INSTITUTET
Universitetsparken 5 Telefon 35 32 04 23
2100 København Ø Telefax 35 32 04 60
Email jens@fys.ku.dk

Opgave 6.4

Dobbelt pendul: Øverste penduls masse: M, nederste penduls masse: m, pendullængder: l. De generaliserede koordinater: θ_1 og θ_2 er vinklerne mellem lodret og pendularmene for henholdsvis øvre og nedre pendul: $L = T - V \quad \Rightarrow$

$$L = \tfrac{1}{2}Ml^2\dot\theta_1^2 + \tfrac{1}{2}ml^2[\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + 2\dot\theta_1\dot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2)] + Mgl\cos\theta_1 + mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

Ligevægtssituationen er $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Indføres "små udsving" om ligevægtstilstanden, $\theta_1 = 0 + \eta_1$ og $\theta_2 = 0 + \eta_2$, og tilnærmes Lagrangefunktionen med dens Taylor-række til 2. grad i η_i og $\dot\eta_i$, fås [idet $\dot\eta_1\dot\eta_2(\eta_1-\eta_2)^2$ er af 4. grad]:

$$L \simeq \tfrac{1}{2}Ml^2\dot\eta_1^2 + \tfrac{1}{2}ml^2(\dot\eta_1 + \dot\eta_2)^2 + Mgl(1 - \tfrac{1}{2}\eta_1^2) + mgl(2 - \tfrac{1}{2}\eta_1^2 - \tfrac{1}{2}\eta_2^2)$$

De tilsvarende Lagrangeligninger er:

$$\begin{aligned} &Ml^2\ddot\eta_1 + ml^2(\ddot\eta_1 + \ddot\eta_2) + (M+m)gl\eta_1 = 0 \\ &ml^2(\ddot\eta_1 + \ddot\eta_2) + mgl\eta_2 = 0 \end{aligned}$$

Indsættes $\eta_j = C_j\, e^{i\omega t}$ og dermed $\ddot\eta_j = -\omega^2\eta_j$ fås følgende ligningssystem

$$\begin{pmatrix} -(M+m)l^2\omega^2 + (M+m)gl & -ml^2\omega^2 \\ -ml^2\omega^2 & -ml^2\omega^2 + mgl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ligningerne har kun løsninger $\neq 0$ hvis determinanten af 2×2 matricen er 0:

$$m(M+m)(gl - l^2\omega^2)^2 - m^2l^4\omega^4 = 0$$

som har løsningerne

$$\omega^2 = \omega_\pm^2 = \frac{g}{l}\frac{M+m}{M}\left(1 \pm \sqrt{\frac{m}{M+m}}\right) \tag{2a}$$

Hvis $M \gg m$ er der kun én løsning, svarende til at M ligger stille og m svinger som et simpelt pendul ($\omega = \sqrt{g/l}$). Bemærk også at begge løsninger for ω^2 er positive og dermed at ligevægtstilstanden (som forventet) er stabil. Løsningerne kan skrives:

$$\omega_\pm^2 = \frac{\omega_0^2}{1 \mp \alpha}, \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{l}, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{m}{M+m}} \tag{2b}$$

Egenvektoren (C_1^+, C_2^+) for $\omega^2 = \omega_+^2$ kan fås fra nederste række af ligning (1)

$$-ml^2\omega_+^2\, C_1^+ + (-ml^2\omega_+^2 + mgl)C_2^+ = 0$$

eller

$$C_1^+ = C_2^+(-1 + \frac{g}{l\omega_+^2}) = C_2^+\Big(-1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_+^2}\Big) = C_2^+(-1 + 1 - \alpha) = -\alpha\, C_2^+$$

og helt analogt er egenvektoren for $\omega^2 = \omega_-^2$ bestemt ved $C_1^- = \alpha\, C_2^-$. Dvs. at en helt generel løsning til bevægelsesligningerne kan skrives

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = A\cos(\omega_+ t + \phi_+)\begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} + B\cos(\omega_- t + \phi_-)\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

hvor de 4 integrationskonstanter (A, B, ϕ_+, ϕ_-) bestemmes af begyndelsesbetingelserne. Det ønskede tilfælde er:

$$\eta_1(0) = \theta_0, \quad \dot\eta_1(0) = 0, \quad \eta_2(0) = 0, \quad \dot\eta_2(0) = 0$$

som er opfyldt når $\phi_+ = \phi_- = 0$ og $-A\alpha = B\alpha = \theta_0/2$ eller

$$\eta_1(t) = \frac{\theta_0}{2}[\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)]$$
$$\eta_2(t) = \frac{\theta_0}{2\alpha}[-\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)]$$

som vha. cosinus relationer, $\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$, omskrives til

$$\eta_1(t) = \theta_0 \cos\Big[\tfrac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)t\Big]\cos\Big[\tfrac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t\Big]$$
$$\eta_2(t) = \frac{\theta_0}{\alpha}\sin\Big[\tfrac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)t\Big]\sin\Big[\tfrac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t\Big]$$

Eksempel $\omega_0^2 = g/l = 1$, $M = 100$, $m = 1$ ($\alpha \simeq 0.1$), og $\theta_0 = 1$: