NIELS BOHR INSTITUTET
Universitetsparken 5
2100 København Ø
Telefon 35 32 04 23
Telefax 35 32 04 60
Email jens@fys.ku.dk

Lagranges multiplikatorer og Hamiltons princip

Hamiltons princip siger, at

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)\, dt = 0\,. \tag{1.1}$$

Med forudsætningen, at $q_1, \ldots, q_n$ er n **uafhængige variable**, fører Hamiltons princip til Lagranges ligninger:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{1.2}$$

Hvis de n variable ikke er uafhængige, dvs. hvis følgende m holonomiske relationer skal være opfyldt

$$f_\alpha(q_1, \ldots, q_n, t) = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots m\,, \tag{1.3}$$

skal Hamiltons extremum-princip fortsat være opfyldt, men, fordi de forskellige koordinat-funktioner, $q_i(t)$, nu ikke kan varieres uafhængigt af hinanden, betragtes i stedet den “generaliserede” Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) = L + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha f_\alpha\,, \tag{1.4}$$

som stadigvæk skal opfylde Hamiltons princip (1.1), idet $f_\alpha = 0$. Indførelsen af de m Lagrange-multiplikatorer, λ_α, betyder at alle q_i i $\mathcal{L}$ kan behandles som uafhængige variable, og dermed at

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{1.5}$$

Disse n Lagrangeligninger kombineret med de m bindinger (1.3) bestemmer systemets n koordinat-funktioner samt de m Lagrange-multiplikatorer.

De m bindinger kan “fjernes” ved at de erstattes med de tilsvarende bindingskræfter, i hvilket tilfælde opstillingen af Lagranges ligninger ud fra d’Alemberts princip viser, at

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^f\,, \tag{1.6}$$

hvor Q_k^f er den $k$te koordinat af de (bindings-)kræfter der ikke er medtaget i potentialet V i $L = T - V$. Differencen mellem højre og venstre siderne af ligning (1.5) og (1.6) er

$$Q_k^f = \frac{d}{dt}\frac{\partial(L - \mathcal{L})}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial(L - \mathcal{L})}{\partial q_k} = \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k}\,, \tag{1.7}$$

dvs. de m bindinger i ligning (1.3) giver bindingskræfter, hvis $k$te komponent bestemmes af de led i den $k$te Lagrangeligning der skyldes λ_α, men med modsat fortegn. Ved udledelsen har vi benyttet Hamiltons princip (1.1), som kun er gyldigt, hvis det samlede virtuelle arbejde udført af bindingskræfterne er 0, dvs. vi må stadigvæk forlange, at

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k^f \delta q_k = 0\,. \tag{1.8}$$

De mulige virtuelle forskydninger δq_k, der er i overenstemmelse med bindingerne, bestemmes af

$$df_\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0 \quad \wedge \quad dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k} \delta q_k = 0\,, \tag{1.9}$$

og dermed er

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k^f \delta q_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k} \delta q_k = 0\,, \tag{1.10}$$

dvs. at resultatet for bindingskræfterne, (1.7), er i overensstemmelse med, at det virtuelle arbejde af bindingskræfterne er 0.

Lærebogens diskussion af dette emne i afsnit 2.4 er problematisk, og i de nyere oplag af 3. udgave, (10 9 8 7 6 5 4 3 2)-optryk, er der en række fejl: Forkert fortegn foran λ_α i ligningerne (2.21)-(2.23), mange trykfejl i eksemplet øverst på side 47, og den sidste halvdel af side 47 er ikke korrekt. Metoden ovenfor kan generaliseres, men kun til også at indbefatte såkaldte semi-holonomiske bindinger:

$$g_\alpha(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) = \frac{dG_\alpha(q_1, \ldots, q_n, t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial g_\alpha}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} = 0 \tag{1.11}$$

dvs. hastighedsafhængige bindinger (g_α), som er totale differentialer af hastighedsuafhængige funktioner (G_α). Er dette tilfælde vil g_α opfylde relationen ("Lagrangeligningerne") til højre i (1.11), og g_α's bidrag til bindingskræfterne bliver

$$Q_k^g = \lambda_\alpha \frac{\partial G_\alpha}{\partial q_k} = \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial \dot{q}_k} \tag{1.12}$$

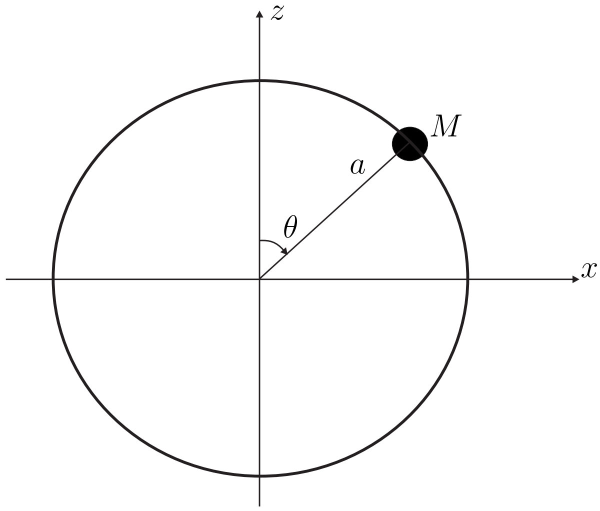
Det tilsvarende resultat i bogen, (2.27) med $\mu_\alpha \to -\dot{\mu}_\alpha$, er kun rigtigt for semi-holonomiske bindinger – ikke generelt, som antydet med ligningerne (2.24)–(2.26) [se fx M.R. Flannery, *The enigma of nonholonomic constraints*, Am. J. Phys. **73**, 265 (2005)].

Disse resultater kan udnyttes i to forskellige situationer:

(1) Vi ønsker at bestemme en eller flere af bindingskræfterne.

(2) Systemet har semi-holonomiske bindinger, $g_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = dG_\alpha/dt = 0$, hvor $G_\alpha(\mathbf{q}, t)$ er vanskelig eller umulig at beregne.

Eksempel på side 47 i de nyere optryk



Den punktformige partikel med massen M glider friktionsløst på en (halv)kugle med radius a under påvirkning af tyngdekraften. M startes med hastigheden 0^+ fra kuglens øverste punkt ($\theta = 0$) med en infinitesimal hastighed i x aksens retning. Bestem den kritiske vinkel θ_0, hvor M forlader kuglens overflade.

M's koordinater er $(x, y, z) = (r \sin\theta, 0, r\cos\theta)$. De generaliserede koordinater er r og vinklen θ i x–z planet ($y = 0$ er konstant). Normalkraften fra M's binding til kugleoverfladen (regnet positiv langs $\hat{\mathbf{r}}$) må være positiv, og M forlader kuglefladen i det øjeblik hvor bindingskraften bliver 0. For at bestemme θ_0 er vi derfor nød til at bestemme bindingskraften, der svarer til bindingen $r = a$. Dette kan gøres ved at bibeholde r som uafhængig variabel i en generaliseret Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) + \lambda f(r, \theta), \tag{1}$$

hvor den holonomiske binding er medtaget som et Lagrange multiplikator λ-led. I tilfældet her er

$$f(r, \theta) = r - a = 0 \tag{2}$$

Lagrangefunktionen er $L = T - V = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - Mgz$ eller

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}M(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - Mgr\cos\theta + \lambda(r - a) \tag{3}$$

De to Lagrange bevægelsesligninger er:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = M\ddot{r} - Mr\dot{\theta}^2 + Mg\cos\theta - \lambda = 0 \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Mr^2\ddot{\theta} + 2Mr\dot{r}\dot{\theta} - Mgr\sin\theta = 0 \tag{5}$$

De tre ligninger (2), (4) og (5) bestemmer de tre ubekendte r, θ og λ. Bindingskraften, der skyldes bindingen $f(r, \theta) = 0$, har komponenterne, se (1.7),

$$Q_r = \lambda\frac{\partial f}{\partial r} = \lambda\,, \qquad Q_\theta = \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0\,, \tag{6}$$

hvilket er de led i (4) og (5), der skyldes λf, men med modsat fortegn. Idet $Q_\theta = 0$ fås at bindingskraften, som forventet, er rettet langs $\hat{\mathbf{r}}$. Indsættes $r = a$, og dermed $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, i (4) fås

$$Q_r = \lambda = -Ma\dot{\theta}^2 + Mg\cos\theta \tag{7}$$

Benytter vi det generelle resultat

$$\int_0^t \ddot{\theta}(t')\dot{\theta}(t')dt' = \int_{\dot{\theta}(0)}^{\dot{\theta}(t)} \dot{\theta}d\dot{\theta} = \tfrac{1}{2}[\dot{\theta}^2(t) - \dot{\theta}^2(0)] = \tfrac{1}{2}\dot{\theta}^2 \tag{8}$$

og at ligning (5) medfører at $\ddot{\theta} = (g/a)\sin\theta$ når $r = a$, fås

$$\dot{\theta}^2 = \int_0^t 2\ddot{\theta}\dot{\theta}dt = \int_0^t \frac{2g}{a}\sin\theta\dot{\theta}dt = \int_0^\theta \frac{2g}{a}\sin\theta d\theta = \frac{2g}{a}\Big[-\cos\theta\Big]_0^\theta = \frac{2g}{a}(1-\cos\theta) \tag{9}$$

Indsættes dette i (7) fås

$$Q_r = Mg(3\cos\theta - 2) \tag{10}$$

som er 0 for $\theta = \theta_0$, hvor

$$\underline{\cos\theta_0 = \frac{2}{3}} \tag{11}$$

Bemærk, at de udledte udtryk er kun korrekte sålænge betingelsen $r = a$ er opfyldt, dvs. for $\theta \leq \theta_0$.