Små svingninger om ligevægtsposition

Benyttes begyndelsesbetingelserne $\mathbf{q}(t=0) = \big(q_1(0), \ldots, q_n(0)\big) = \mathbf{q}_0$ og $\dot{\mathbf{q}}(t=0) = \mathbf{0}$, hvor $V(\mathbf{q})$ har et ekstremum for $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, dvs. $Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\dfrac{\partial V}{\partial q_j} = 0$ for $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, er Lagranges ligninger identiske opfyldte for $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0$ (eventuelle bindinger skal være tidsuafhængige). Denne løsning betegnes en ligevægtstilstand.

Hvis $V(\mathbf{q}_0)$ er et minimumspunkt er ligevægtstilstanden stabil (pendul i ro). I modsat fald er tilstanden ustabil (et æg der balancerer på spidsen), og systemet vil accelerere væk fra den ustabile ligevægtstilstand ved *små udsving*.

"Små udsving": Taylor-rækkeudvikling af V og T omkring $\mathbf{q}_0$, dvs. indsæt $q_i = q_{0i} + \eta_i$

$$V(\mathbf{q}) = V(\mathbf{q}_0) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 \eta_i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \eta_i \eta_j + \cdots \simeq V(\mathbf{q}_0) + \tfrac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j, \quad V_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0$$

Ifølge (1.72): scleronomous bindinger, $\dfrac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0, \quad \Rightarrow \quad T = \tfrac{1}{2} M_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \tfrac{1}{2} M_{ij}(\mathbf{q}_0) \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$

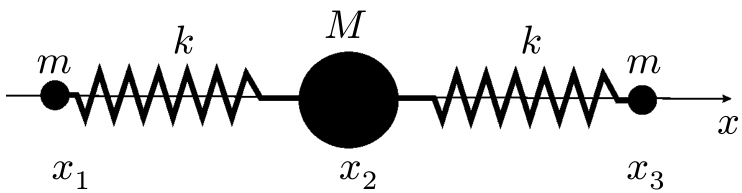
(Bemærk at her benyttes Einstein konventionen: Produkter skal summeres over gentagne indices, $a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^n a_i b_i$. Hvis **ikke** må man eksplicit gøre opmærksom på det).

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}\big(M_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j - V_{ij}\eta_i\eta_j\big) - V(\mathbf{q}_0), \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = M_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j = 0$$

(Bemærk at $M_{ij} = M_{ji}$, $\quad V_{ij} = V_{ji}$, og at der i den sidste ligning er underforstået en summation mht. j. Index i optræder kun én gang i hvert led og der skal **ikke** summeres mht. i. Bogen har en forstyrrende trykfejl i (6.8): $\ddot{\eta}_{ij} \mapsto \ddot{\eta}_j$).

Indsættes $\eta_j = C_j e^{i\omega t}$, $\ddot{\eta}_j = -\omega^2 \eta_j$ i bevægelseligningerne har de kun $\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$ løsning, hvis det $\big(-\omega^2 \overline{\overline{M}} + \overline{\overline{V}}\big) = 0 \Rightarrow n$ egenværdier $\omega^2 > 0$ (stabilitetskriterium).

Lineært tre-atomigt molekyle



$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - b)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2 - b)^2$
Ligevægt: $x_{02} - x_{01} = x_{03} - x_{02} = b$
Små udsving: $x_i = x_{0i} + \eta_i$ eller
$V = \frac{1}{2}k\big(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3\big)$
$T = \frac{1}{2}\big(m\,\dot\eta_1^2 + M\dot\eta_2^2 + m\,\dot\eta_3^2\big)$

$$M_{ij}\ddot\eta_j + V_{ij}\eta_j = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} m & 0 & 0\\ 0 & M & 0\\ 0 & 0 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot\eta_1\\ \ddot\eta_2\\ \ddot\eta_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & -k & 0\\ -k & 2k & -k\\ 0 & -k & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\eta_i = C_i\,e^{i\omega t},\quad \ddot\eta_i = -\omega^2\eta_i \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0\\ -k & 2k - M\omega^2 & -k\\ 0 & -k & k - m\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Homogent ligningssystem som kun har løsninger $\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$ hvis determinanten $= 0$:
$\det() = (k - m\omega^2)\big[(2k - M\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2\big] - (-k)\big[-k(k - m\omega^2)\big] = 0$

$$\Rightarrow\ (k - m\omega^2)\big[mM\omega^4 - (M+2m)k\omega^2\big] = 0 \quad\Rightarrow\quad \omega^2 = 0,\quad \omega^2 = \frac{1}{m}k,\quad \omega^2 = \frac{M+2m}{Mm}k$$

$\omega^2 = 0 \Rightarrow kC_1 - kC_2 = 0,\ -kC_1 + 2kC_2 - kC_3 = 0,\ -kC_2 + kC_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{C} = (1,1,1)C$
Konstant translatorisk bevægelse uden kraftpåvirkning ($\omega = 0$): $x_i = x_{0i} + Ct$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow -kC_2 = 0,\ -kC_1 + \frac{2m - M}{m}kC_2 - kC_3 = 0\,, -kC_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{C} = (1,0,-1)C$$

De to m'er svinger i modfase og M ligger stille ($R = x_{02}$).

$$\omega^2 = \frac{M+2m}{Mm}k \Rightarrow -\frac{2m}{M}kC_1 - kC_2 = 0,\ -kC_1 - \frac{m}{M}kC_2 - kC_3 = 0,\ -kC_2 - \frac{2m}{M}kC_3 = 0$$

$\mathbf{C} = \Big(1, -\dfrac{2m}{M}, 1\Big)C$. De to m'er svinger i samme fase og M i modfase således at $R = x_{02}$.