**© 2018 г. Б. Андресен, проф.
(Университет Копенгагена, Дания, andresen@fys.ku.dk),
П. Саламон, проф.
(Университет Сан-Диего, США, salamon@math.sdsu.edu),
К.Х. Хоффман, проф.
(Технический университет г. Хемница, ФРГ,
hoffmann@physik.tu-chemnitz),
А.М. Цирлин, д-р.техн. наук
(ИПС им. А.К. Айламазяна РАН, tsirlin@sarc.botik.ru)**

Оптимальные процессы для управляемых осцилляторов

Рассмотрена задача об оптимальном параметрическом управлении одиночным осциллятором и ансамблем осцилляторов за счет изменения одного из коэффициентов системы уравнений, их характеризующих. Получены решения задачи о максимальном изменении энергии колебаний за фиксированное время.

Параметрическое управление, одиночный осциллятор, ансамбль осцилляторов, задача на быстродействие

1. Введение

Задача управления колебаниями маятника для случая, когда управляющее воздействие представляет собой силу, влияющую на ускорение или на скорость маятника аддитивно, мало отличается от задачи управления движением, исследованной еще А.А. Фельдбаумом. Между тем часто можно наблюдать, как раскачивают или тормозят качели, меняя расстояние от точки подвеса до центра тяжести маятника. Формально это соотаетствует параметрическому управлению, когда управляющим воздействием является один из коэффициентов дифференциального уравнения. Такая задача рассмотрена в [1] применительно к линеаризованному маятнику. Там получено простое, но не точное ее решение. Ниже приведено решение задачи параметрического управления одиночным осциллятором и показано принципиальное отличие ансамбля осцилляторов при решении для него подобной задачи.

Ансамбль осцилляторов представляет собой систему синхронизированных линеаризованных маятников, у которых одинакова частота, но различны фазы колебаний. Энергия колебаний каждого из осцилляторов ансамбля механическая, и в этом отношении он подобен одиночному осциллятору, но фазы колебаний у каждого из осцилляторов различны и управление системой возможно лишь на макроуровне, воздействием на параметры среды, определяющие общую для ансамбля частоту колебаний. В этом отношении ансамбль осцилляторов подобен макросистеме. И одной из характеризующих ее переменных является энтропия фон-Неймана (см. [2]).

Физическая система, адекватная рассмотренной модели, — кристаллическое тело. Управлением служит лазерное излучение [2]. Изменению внутренней энергии системы соответствует ее нагрев или охлаждение. Причем в отличие от таких классических макросистем, как идеальный газ, ансамбль осцилляторов может быть за конечное время нагрет или охлажден без изменения энтропии (адиабатически). В [3, 4] показано, что продолжительность адиабатического охлаждения ограничена снизу и найдена эта граница. Ниже показано, что уменьшить энергию колебаний ансамбля адиабатически можно лишь до некоторого предела даже за сколь угодно большое время. В такой же задаче для одиночного осциллятора энергия колебаний может быть сделана сколь угодно малой. В [5] задача быстродействия для ансамбля осцилляторов рассмотрена как иллюстрация возможностей метода замены фазовых переменных.

2. Одиночный осциллятор

Пусть p — скорость, а q — отклонение идеального линеаризованного маятника. Его движение характеризуют уравнения

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -uq, \quad p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0, \tag{2.1}$$

где $u \geqslant 0$ — параметр, зависящий от массы маятника и длины его подвеса (расстояния от точки подвеса до центра тяжести). Физически он равен квадрату частоты его собственных колебаний. Длина подвеса может изменяться за счет изменения положения центра тяжести. Так что $u(t)$ — управление, ограниченное условием

$$0 < u_1 \leqslant u \leqslant u_2. \tag{2.2}$$

Задача параметрического управления осциллятором рассмотрена в [1, 5] как задача на быстродействие.

Ниже показано, что задачи о минимуме времени перехода на заданный энергетический уровень и о минимальном (максимальном) приращении энергии в процессе заданной продолжительности не являются эквивалентными, так как зависимость предельно достижимой энергии от продолжительности процесса — не строго монотонная функция.

Полная энергия осциллятора

$$E(t) = p^2 + uq^2. \tag{2.3}$$

При любом постоянном значении u скорость изменения E в силу уравнений (2.1) равна нулю, т.е. $E(t)$=const.

В начальный момент времени

$$E_0 = p_0^2 + u_0 q_0^2.$$

В конечный момент τ

$$\overline{E} = E(\tau) = p^2(\tau) + u(\tau)q^2(\tau) = \overline{p}^2 + u(\tau)\overline{q}^2. \tag{2.4}$$

Так как $u(\tau)$ можно изменять скачком, то в зависимости от постановки критерий оптимальности в задаче о максимуме изменения энергии примет форму

$$\overline{E} = \overline{p}^2 + u_2\overline{q}^2 \longrightarrow \max \tag{2.5}$$

или

$$\overline{E} = \overline{p}^2 + u_1\overline{q}^2 \longrightarrow \min\,. \tag{2.6}$$

В дальнейшем для определенности рассмотрим задачу с критерием (2.6), причем без ограничения общности примем $u_1 = 1$, так что $1 \leqslant u \leqslant u_2/u_1$. Энергию $\overline{E}$ можно переписать в интегральной форме как

$$\overline{E} = E_0 + \int\limits_0^\tau \frac{d}{dt}(p^2+q^2)dt = E_0 - 2\int\limits_0^\tau pq(u-1)dt \longrightarrow \min\,. \tag{2.7}$$

Из этого выражения в [1] сделан ошибочный вывод, что для четных (2 и 4) квадрантов плоскости p, q, когда произведение этих переменных отрицательно, нужно, чтобы $u^* = 1$, а для нечетных (1 и 3) $pq > 0$ выбирать $u^* = \frac{u_2}{u_1}$. Связи (2.1) между управлением и переменными состояния во внимание не принимались.

Прежде чем решать задачу(2.7), (2.1), упростим ее, перейдя к новым переменным. Так как правые части уравнений (2.1) могут изменять знак, введем новую переменную $z(p,q)$ так, чтобы ее скорость вдоль траекторий системы не изменяла знака.

Фазовые траектории осциллятора для любых допустимых значений u вращаются против часовой стрелки, поэтому выберем в качестве z выражение

$$z = arctg(-\frac{p}{q}), \quad z_0 = arctg(-\frac{p_0}{q_0}). \tag{2.8}$$

Скорость изменения этой переменной больше либо равна единице:

$$\dot{z} = \frac{1}{1+\frac{p^2}{q^2}}\frac{uq^2+p^2}{q^2} = \frac{u+\operatorname{tg}^2 z}{1+\operatorname{tg}^2 z}. \tag{2.9}$$

Заменим энергию E на монотонно связанную с ней переменную

$$e = ln(p^2+q^2),$$

так что

$$\dot{e} = 2\frac{pq(1-u)}{p^2+q^2} = 2\frac{\operatorname{tg} z(u-1)}{1+\operatorname{tg}^2 z}, \quad e_0 = \ln E_0. \tag{2.10}$$

Отметим, что правая часть уравнения (2.9) положительна, а переменная e не входит в правые части (2.9), (2.10), т.е. уравнение (2.10) по терминологии [6] является ляпуновским и может быть переписано в интегральной форме, как это сделано ниже.

Сделаем замену

$$dt = \frac{(1+\operatorname{tg}^2 z)dz}{\operatorname{tg}^2 z + u}$$

и перепишем задачу торможения осциллятора в форме

$$e(\tau) = e(\overline{z}) = e_0 + 2\int\limits_{z_0}^{\overline{z}} \frac{\operatorname{tg} z(u-1)dz}{u+\operatorname{tg}^2 z} \longrightarrow \min_{u(z),\overline{z}} \tag{2.11}$$

при условии

$$\int\limits_{z_0}^{\overline{z}} \frac{(1+\operatorname{tg}^2 z)dz}{\operatorname{tg}^2 z + u} = \tau. \tag{2.12}$$

Решением этой задачи является зависимость $u^*(z)$ и значение $\overline{z}^*$. Отметим, что $z > 0$ для четных и $z < 0$ для нечетных квадрантов плоскости p, q, поэтому, если проигнорировать условие (2.12), решение [1] правильное. Оно тем ближе к правильному решению поставленной задачи, чем больше τ, т.е. чем менее существенно ограничение (2.12).

Для получившейся задачи (2.11), (2.12) с одним интегральным условием найдется такой ненулевой вектор λ, что функция Лагранжа L на оптимальном решении минимальна по u. Для невырожденного решения ($\lambda_0 \neq 0$) L примет форму

$$L = \frac{\operatorname{tg} z(u-1)}{(u+\operatorname{tg}^2 z)} + \lambda \frac{1+\operatorname{tg}^2 z}{u+\operatorname{tg}^2 z}. \tag{2.13}$$

Производная L по u равна

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{1+\operatorname{tg}^2 z}{(u+\operatorname{tg}^2 z)^2}(\operatorname{tg} z - \lambda),$$

ее знак совпадает со знаком второго сомножителя. Оптимальное управление максимально ($u^* = \frac{u_2}{u_1}$), когда $(\operatorname{tg} z - \lambda) < 0$. Для $(\operatorname{tg} z - \lambda) > 0$ оно минимально ($u^* = 1$).

Множитель λ равен $-\frac{de^*(\tau)}{d\tau}$ (см. [7]), где $e^*(\tau)$ — минимальное достижимое за время τ значение энергии колебаний. Так как с ростом допустимой продолжительности значение e^* уменьшается, то $\lambda > 0$. Линией переключения является прямая с наклоном $-\lambda$. Она расширяет секторы, в которых управление максимально. Это не только первый и третий квадранты, где $\operatorname{tg} z < 0$, но и части второго и четвертого, в которых $\operatorname{tg} z < \lambda$.

Второй линией переключения является ось ординат, на которой $\operatorname{tg} z$ терпит разрыв.

При $z = \overline{z}$ управление u^* становится скачком равным единице.

Оптимальный процесс удобно изобразить на плоскости с координатами p^2 и q^2, так как постоянным значениям управления на ней соответствуют прямые с наклоном -1 и $-u_2/u_1$. Если начальное состояние на плоскости p, q лежит правее оси ординат и выше линии переключения $p = -\lambda q$ или левее этой оси и ниже линии переключения, то оптимальное управление принимает в момент $t = 0$ значение $u_{max} = u_2/u_1$, траектория пересекает ось абсцисс ($p = 0$) и система движется до линии переключения $p^2 = \lambda^2 q^2$ (см. рис.1), после чего управление принимает значение $u^* = 1$ и остается неизменным до переключения управления на оси ординат ($q = 0$).

Если начальные условия таковы, что p_0, q_0 находятся левее оси ординат и выше линии переключения или правее оси ординат и ниже этой линии, то $u^* = 1$ и система сначала движется в сторону оси ординат, а затем начинает движение с наклоном $-u_{\max} = -u_2/u_1$ до линии переключения. При этом в каждом i-м цикле, начинающемся и заканчивающемся на оси ординат, степень затухания

$$\varphi = \frac{e_{i-1}}{e_i} = \frac{\lambda^2 + u_{\max}}{\lambda^2 + 1} > 1 \tag{2.14}$$

не зависит от i.

Продолжительность такого цикла $\Delta\tau_i$ также зависит от λ и не зависит от i. При отсутствии ограничений на продолжительность процесса энергия может быть сделана сколь угодно малой.

$$\Delta = \Delta\tau_i = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{u_{\max}}}\right) + \frac{1}{\sqrt{u_{\max}}} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\sqrt{u_{\max}}} - \operatorname{arctg}\lambda. \tag{2.15}$$

Максимум отношения φ/Δ достигается при выборе значения λ, удовлетворяющего условию

$$\operatorname{arctg}\lambda - \frac{1}{\sqrt{u_{\max}}} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\sqrt{u_{\max}}} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{u_{\max}}}\right) - \frac{1}{2\lambda}. \tag{2.16}$$

Левая часть этого уравнения отрицательна, а правая положительна при $\lambda < 0$, так что оно имеет только положительный корень. Так как левая часть уравнения с ростом λ растет и стремится к значению $\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{u_{\max}}}\right)$, а правая монотонно возрастает до большего значения $\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{u_{\max}}}\right)$, то решение единственно.

3. Ансамбль осцилляторов

Рассмотрим задачу о минимизации энергии колебаний за заданное время τ для ансамбля осцилляторов.

Пусть i-й осциллятор характеризуется уравнениями (2.1), связывающими его отклонение q_i и импульс p_i друг с другом и с общей для ансамбля частотой ω.

$$\dot{q}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = -\omega^2 q_i, \quad i = 1, ..., N. \tag{3.1}$$

Выбором размерности можно добиться, чтобы масса осциллятора равнялась $m = 1$.

Макропеременные, характеризующие ансамбль [3]:

— энергия

$$E(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(p_i^2 + \omega^2 q_i^2), \tag{3.2}$$

— лагранжиан

$$L(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(p_i^2 - \omega^2 q_i^2), \tag{3.3}$$

— корреляция

$$C(t) = \omega(t)\sum_{i=1}^{N} p_i q_i. \tag{3.4}$$

Обозначив $\dot{\omega}/\omega$ через u, можно записать систему, характеризующую динамику макропеременных [2], как

$$\begin{aligned} &\dot{E} = u(E-L), \quad E(0)=E_0, \\ &\dot{L} = -u(E-L) - 2\omega C, \quad L(0) = L_0, \\ &\dot{C} = 2\omega L - uC, \quad C(0) = C_0, \\ &\dot{\omega} = u\omega, \quad \omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2, \quad \omega(0) = \omega_0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Так как в силу уравнений (3.1)

$$\frac{d}{dt}(p_i q_j - p_j q_i) = -\omega^2 q_i q_j + p_i p_j + \omega^2 q_j p_i - p_j p_i = 0 \quad \forall i, j,$$

между переменными состояния в (3.5) должна существовать связь. Действительно, как легко убедиться, величина

$$X = \frac{E^2 - L^2 - C^2}{\omega^2} = X_0 = \frac{E_0^2 - L_0^2 - C_0^2}{\omega_0^2} > 0. \tag{3.6}$$

Величина

$$X = 0,5 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (p_i q_j - p_j q_i)^2$$

не изменяется во времени в силу уравнений (3.5), она однозначно связана с энтропией фон-Неймана S_N ансамбля осцилляторов [2] как:

$$S_N = \ln\left(\sqrt{X - \frac{1}{4}}\right) + \sqrt{X}\,\operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{\sqrt{X}}{X - \frac{1}{4}}\right).$$

Постоянство энтропии говорит о том, что процесс изменения состояния системы за счет изменения частоты колебаний адиобатический.

Из постоянства X следует, что для $t = \tau$

$$\overline{E}^2 = (X_0 \overline{\omega}^2 + \overline{L}^2 + \overline{C}^2).$$

На управление u не наложено ограничений, поэтому в задаче о минимуме конечной энергии ансамбля величину $\overline{\omega}$ можно принять равной ω_1 и формулировать задачу как

$$\overline{E} = \sqrt{\omega_1^2 X_0 + \overline{L}^2 + \overline{C}^2} \longrightarrow \min \tag{3.7}$$

при условиях (3.5). При этом $\overline{E}$ заведомо не меньше, чем $\omega_1\sqrt{X_0}$.

Для решения задачи проведем замену переменных таким образом, чтобы в правые части дифференциальных уравнений (3.5) не входило неограниченное управление u. Обозначим новые переменные состояния через z_1, z_2, z_3.

$$z_1 = E + L, \quad z_2 = \frac{E - L}{\omega^2}, \quad z_3 = \frac{C^2}{\omega^2} \geqslant 0. \tag{3.8}$$

Исходные переменные связаны с введенными как

$$E = 0,5(z_1 + \omega^2 z_2), \quad L = 0,5(z_1 - \omega^2 z_2), \quad C = \omega\sqrt{z_3}. \tag{3.9}$$

Инвариант равен

$$X = X_0 = z_1 z_2 - z_3. \tag{3.10}$$

Таким образом, из трех введенных переменных состояния только две являются независимыми. Множество допустимых состояний системы на плоскости z_1, z_2 лежит заведомо выше гиперболы $z_1 z_2 = X_0$.

Минимально возможное значение энергии, которое может быть достигнуто за сколь угодно большое время при параметрическом управлении, и соответствующие ему значения переменных равны

$$\overline{E}^* = \omega_1\sqrt{X_0} = \overline{z_1}^*, \quad \overline{z_2}^* = \frac{\overline{z_1}^*}{\omega_1^2}. \tag{3.11}$$

Запишем уравнения (3.5) для введенных переменных:

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{dL}{dt} = -2\omega C = -2\omega^2\sqrt{z_3}, \quad z_1(0) = z_{10}, \tag{3.12}$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{dE}{dt} - \frac{dL}{dt}\right) - \frac{2}{\omega}(E - L)u = 2\frac{C}{\omega} = 2\sqrt{z_3}, \quad z_2(0) = z_{20}. \tag{3.13}$$

В свою очередь, $z_3 = z_1 z_2 - X_0$, так что система уравнений для независимых переменных примет форму

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = -2\omega^2\sqrt{z_1 z_2 - X_0}, \quad z_1(0) = z_{10}, \\ \dfrac{dz_2}{dt} = 2\sqrt{z_1 z_2 - X_0}, \quad z_2(0) = z_{20}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Начальное состояние этой системы задано, как и продолжительность процесса. Требуется найти $\omega(t)$ так, чтобы $\overline{E}$ была минимальна.

Так как

$$\overline{L}^2 + \overline{C}^2 = \omega_1^2(\overline{z_1 z_2} - X_0) + 0,25(\overline{z_1} - \omega_1^2\overline{z_2})^2 = 0,25(\overline{z_1} + \omega_1^2\overline{z_2})^2 - \omega_1^2 X_0,$$

то критерий оптимальности может быть записан как

$$\overline{E} = 0,5(\overline{z_1} + \omega_1^2\overline{z_2}) \longrightarrow \min_{\omega_i \leqslant \omega \leqslant \omega_2}. \tag{3.15}$$

При этом для любого постоянного управления ω фазовая траектория на плоскости z_1, z_2 представляет собой прямую, так как

$$\frac{dz_1}{dz_2} = -\omega^2. \tag{3.16}$$

Правая часть уравнения (3.13) не зависит от ω и имеет тот же знак, что и dz_2, так что

$$dt = \frac{|dz_2|}{2\sqrt{z_1 z_2 - X_0}}. \tag{3.17}$$

Изменение критерия (3.15) в силу уравнений (3.14):

$$\dot{E} = 0,5(\dot{z}_1 + \omega_1^2 \dot{z}_2) = (\omega^2 - \omega_1^2)\sqrt{z_1 z_2 - X_0}. \tag{3.18}$$

Производная:

$$\frac{dE}{dz_2} = -0,5(\omega^2 - \omega_1^2) \leqslant 0. \tag{3.19}$$

Задача о минимуме конечной энергии трансформируется к виду

$$E_0 - \overline{E} = \int\limits_{z_{20}}^{\overline{z_2}} (\omega^2 - \omega_1^2) dz_2 \longrightarrow \max_{\omega(z_2), \overline{z_2}} \tag{3.20}$$

при условиях (3.16) и

$$\int\limits_{z_{20}}^{\overline{z_2}} \frac{|dz_2|}{2\sqrt{(z_1(z_2) z_2 - X_0)}} = \tau. \tag{3.21}$$

Обозначим через υ квадрат частоты колебаний. Условия принципа максимума для задачи (3.20),(3.21) примут форму ($\psi_0 = 1$)

$$H = \upsilon - \omega_1^2 + \frac{\lambda}{2\sqrt{z_1 z_2 - X_0}} - \psi \upsilon. \tag{3.22}$$

$$\frac{d\psi}{dz_2} = -\frac{\partial H}{\partial z_1} = +\frac{\lambda z_2}{4(z_1 z_2 - X_0)^{3/2}}, \quad \psi(\overline{z_2}) = 0. \tag{3.23}$$

Так как с ростом τ, величина $\Delta \overline{E}^* = E_0 - \overline{E}^*$ не убывает то (см. [7])

$$\lambda = -\frac{\partial \Delta \overline{E}^*}{\partial \tau} \leqslant 0. \tag{3.24}$$

Из условия (3.23) $\frac{d\psi}{dz_2}$ не меняет знака, а значит, в силу условия (3.24) $\psi(z_2)$ монотонно уменьшается. Управление $\upsilon^*(z_2) = \mathrm{sign}(1 - \psi(z_2))$ доставляет максимум функции Гамильтона H. Оно минимально (равно ω_1^2), когда $\psi(z_2) > 1$, и максимально (равно ω_2^2), когда $\psi(z_2) < 1$. Так как $\psi(z_2)$ монотонно уменьшается, то управление имеет на интервале $z_{20} < z_2 < \overline{z}_2$ не более одного переключения.

Пусть начальная частота задана и равна $\omega_0 (\omega_1 \leqslant \omega_0 \leqslant \omega_2)$. Оптимальная частота при $t = 0$ скачком изменяется до ω_1 (если $\psi(z_{20}) > 1$) или до ω_2 (если $\psi(z_{20}) < 1$), затем в любом случае в конце процесса она принимает значение ω_2. В момент τ или, что то же самое, при $z_2 = \overline{z_2}$ управление вновь скачком уменьшается до ω_1^2.

При движении системы на фазовой плоскости z_1, z_2 с любой фиксированной частотой ее энергия не изменяется, поэтому нетрудно посчитать прирост энергии для любой структуры оптимального процесса (рис. 2).

Рассмотрим две возможных структуры оптимального процесса.

1. *Процесс без переключения.* Частота в начальной точке 0 скачком возрастает от ω_0 до ω_2, система движется с частотой ω_2 в течение времени τ до точки F_0, где частота скачком уменьшается до ω_1.

2. *Процесс с одним переключением.*Частота в точке 0 уменьшается от ω_0 до ω_1, система движется с частотой ω_1 в течении времени τ_{r1} до точки переключения r_1, в которой она возрастает до ω_2. Затем с частотой ω_2 система движется до точки F_1 в течение времени $\tau - \tau_{r1}$, где частота скачком падает до ω_1.

Подсчитаем уменьшение энергии для процессов 1 и 2:

$$\Delta E_1 = E_0 - E_{F0} = (\omega_0^2 - \omega_2^2) z_{20} + (\omega_2^2 - \omega_1^2)\overline{z_{21}} = \omega_0^2 z_{20} + \omega_2^2(\overline{z_{21}} - z_{20}) - \omega_1^2 \overline{z_{21}}, \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_2 = E_0 - E_{F1} = (\omega_0^2 - \omega_1^2) z_{20} + (\omega_1^2 - \omega_2^2) z_{2R1} + (\omega_2^2 - \omega_1^2)\overline{z_{22}} = \\ = \omega_0^2 z_{20} + \omega_1^2 (z_{2R1} - z_{20} - \overline{z_{22}}) + \omega_2^2(\overline{z_{22}} - z_{2R1}). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Процесс 2 предпочтительнее, если $\delta = (\Delta E_2 - \Delta E_1) > 0$. Величина δ равна

$$\delta = \omega_1^2 (z_{2R1} - z_{20} - \overline{z_{22}} + \overline{z_{21}}) + \omega_2^2(\overline{z_{22}} - z_{2R1} - \overline{z_{21}} + z_{20}) = (\omega_2^2 - \omega_1^2)(\overline{z_{22}} - z_{2R1} - \overline{z_{21}} + z_{20}). \tag{3.27}$$

Эта величина положительна, если

$$\overline{z_{22}} - z_{2R1} > \overline{z_{21}} - z_{20}. \tag{3.28}$$

Таким образом, лучше тот процесс, при котором прирост переменной z_2 на участке, где частота равна ω_2, больше. Процесс с переключением протекает в области, где произведение $z_1 z_2$, а значит скорость изменения z_2 во времени, больше, чем для процесса без переключения С другой стороны, продолжительность этого участка сокращается за счет времени перехода в точку переключения. Так что процесс с переключением оптимален, а точку переключения нужно выбирать по условию максимума ΔE.

Величина $\overline{z_{21}}$ определена условием (3.21)

$$\int\limits_{z_{20}}^{\overline{z_{21}}} \frac{dz_2}{2\sqrt{(2E_0 - \omega_2^2 z_2) z_2 - X_0}} = \tau, \tag{3.29}$$

которое после взятия интеграла приводит к уравнению относительно $\overline{z_{21}}$

$$\arcsin \frac{E_0 - \omega_2^2 \overline{z_{21}}}{\sqrt{E_0^2 - \omega_2^2 X_0}} = \arcsin \frac{E_0 - \omega_2^2 z_0}{\sqrt{E_0^2 - \omega_2^2 X_0}} - 2\omega_2 \tau. \tag{3.30}$$

Переменные, стоящие в левой части неравенства (3.28), связаны друг с другом условием, наложенным на продолжительность процесса:

$$\int\limits_{z_{20}}^{z_{2R1}} \frac{dz_2}{2\sqrt{(2E_0 - \omega_1^2 z_2) z_2 - X_0}} + \int\limits_{z_{2R1}}^{\overline{z_{22}}} \frac{dz_2}{2\sqrt{(2E_0 - \omega_2^2 z_2) z_2 - X_0}} = \tau, \tag{3.31}$$

или после взятия интегралов

$$
\frac{1}{\omega_1}\left[\arcsin\frac{E_0-\omega_1^2 z_{2R1}}{\sqrt{E_0^2-\omega_1^2 X_0}}-\arcsin\frac{E_0-\omega_1^2 z_{20}}{\sqrt{E_0^2-\omega_1^2 X_0}}\right]+
+\frac{1}{\omega_2}\left[\arcsin\frac{E_0-\omega_2^2 \overline{z_{22}}}{\sqrt{E_0^2-\omega_2^2 X_0}}-\arcsin\frac{E_0-\omega_2^2 z_{2R1}}{\sqrt{E_0^2-\omega_2^2 X_0}}\right]=2\tau. \tag{3.32}
$$

Выбор z_{2R1} сводится к поиску максимума разности $\overline{z_{22}} - z_{2R1}$ при условии (3.32). Условия оптимальности этой задачи, полученные с использованием метода Лагранжа, после исключения неопределенного множителя λ имеют форму

$$
F(\overline{z_{22}}, \omega_2) = F(\overline{z_{2R1}}, \omega_2) - F(\overline{z_{2R1}}, \omega_1), \tag{3.33}
$$

где

$$
F(\overline{z}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{z(2E_0 - \omega^2) - X_0}}.
$$

Система (3.32), (3.33) определяет оптимальные значения $\overline{z_{2R1}}$ и $\overline{z_{22}}$.

Оптимальный процесс изменения управляющего параметра ω показан на рис. 3.

4. Заключение

Получены структуры оптимальных процессов параметрического управления одиночным осциллятором и ансамблем осцилляторов, позволяющих за заданное время τ максимально сократить (увеличить) энергию колебаний, а также расчетные соотношения для выбора моментов переключения управления. Для одиночного осциллятора энергия колебаний может быть сделана за достаточно длительное время сколь угодно малой. Для ансамбля осцилляторов — уменьшена лишь до некоторого предела. Причина этого различия в том, что ансамбль осцилляторов представляет собой макросистему, в которой управление меняет общую для ансамбля частоту колебаний и не не влияет на их индивидуальные фазы. В связи с этим возможности «адиабатического» управления ограничены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Piccoli B., Kulkarni J.*, Pumping a Swing by Standing and Squatting // IEEE Contr. Syst. Mag. 2005. No. 8. P.48-56.

2. *Salamon P., Hoffman K.H., Rezek Y., and Kozloff R.* // Phys. Chem. (2009) **11** 1027.

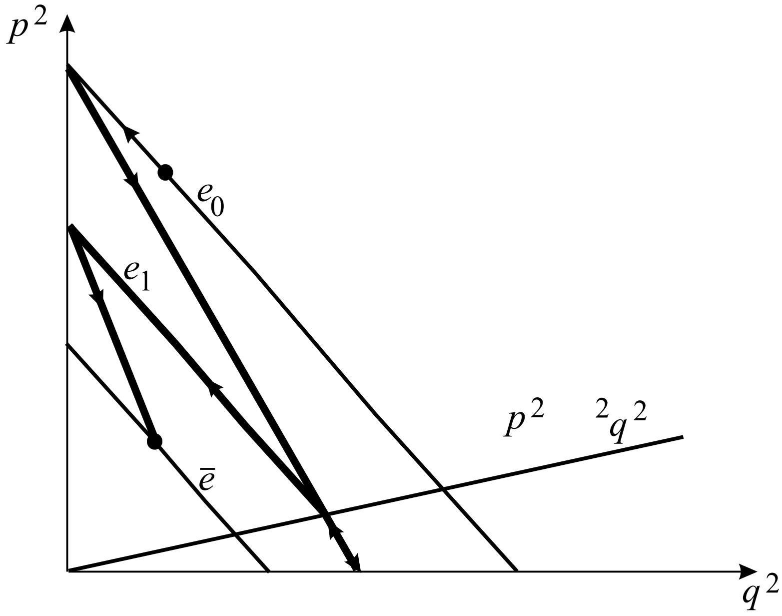
3. *Hoffman K.H., Salamon P., Rezek Y., and Kosloff R.* // Europhys. Lett. (2011) **96**, 60015.

4. *Andresen B., Hoffman K.H., Nulton J., Tsirlin A.M., and Salamon P.* // Eur. J. Phys. (2011) **32** 827, .

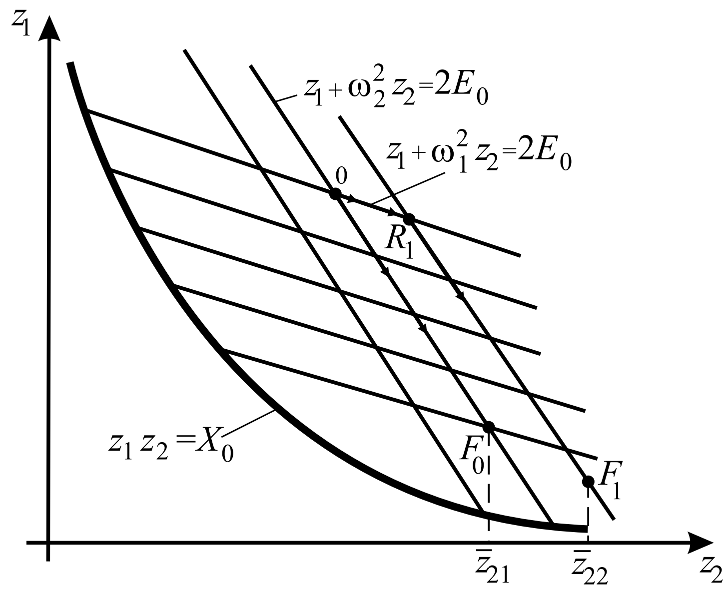
5. *Tsirlin A.M., Salamon P., Hoffman K.H.* // Autom. Remote Control (Engl. Transl.) (2011) **72**, 1627.

6. *Розоноэр Л.И., Цирлин А.М.* Оптимальное управление термодинамическими процессами. // АиТ. №№ 1,2,3, 1983.

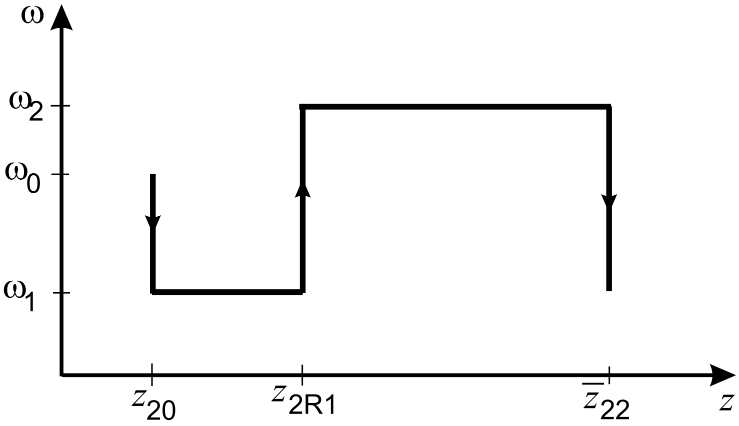
7. *Габасов Р.Г., Кириллова Ф.М.* Методы оптимизации. Минск: Изда-во БГУ, 1975.



p^2
e_0
e_1
$p^2 \quad {}^2q^2$
$\bar{e}$
q^2



z_1
$z_1+\omega_2^2 z_2=2E_0$
$z_1+\omega_1^2 z_2=2E_0$
0
R_1
$z_1 z_2 = X_0$
F_0
F_1
$\bar{z}_{21}$
$\bar{z}_{22}$
z_2



Подрисуночные подписи

Рис.1. Изменение энергии осциллятора вдоль оптимальной траектории на плоскости p^2, q^2.

Рис.2. Характер оптимальных процессов на плоскости $z_1 z_2$.

Рис.3. Изменение управляющего параметра ω в оптимальном процессе.